

Trois études de suites

Exercice 1

Soit k un entier naturel fixé. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^n (1+\sqrt{j})}$.

1. Quelques valeurs numériques

(a) On choisit $k = 5$.

Calculer u_n avec 5 chiffres significatifs, quand $1 \leq n \leq 10$, $n = 20$, $n = 50$. [S]

(b) Même question avec $k = 10$. [S]

2. Convergence de la suite (u_n)

(a) Dans le cas général, calculer le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, pour tout $n \geq 2$. [S]

(b) En déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang N à préciser. [S]

(c) Montrer que la suite u est convergente. [S]

3. Limite de la suite (u_n)

(a) Montrer $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq M \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ [S]

(b) Montrer que : $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ et que : $\forall x > 0$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$. [S]

(c) En déduire que : $\forall n \geq M$, $\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) \leq \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$. [S]

(d) Conclure à $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. [S]

Exercice 2

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$. On veut calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

1. Première méthode.

On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = \frac{n^n}{n!}$.

(a) Etablir : $\forall x \geq 0$, $0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$. [S]

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 + \ln(v_n) - \ln(v_{n+1}) \leq \frac{1}{2n}$. [S]

(c) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[$, $x \leq -\ln(1-x)$. [S]

(d) En déduire : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$. [S]

(e) Prouver finalement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(v_n) = 1$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. [S]

2. Deuxième méthode.

(a) Vérifier que : $\forall n \geq 1$, $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(k) - \ln(n)$. [S]

(b) En encadrant $\ln(k)$ à l'aide d'intégrales, encadrer $\ln(u_n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. [S]

Exercice 3

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $u_n = \sqrt{n} \frac{C_{2n}^n}{4^n}$.

1. Calculer u_1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. [S]
2. Prouver par récurrence que $u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$. [S]
3. Montrer : $\exists L \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. [S]
4. Montrer que : $\forall x > 0, \frac{1}{8(x+\frac{1}{2})} \leq (x + \frac{1}{2}) - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$. [S]
5. En déduire que : $\forall k \geq 1, \frac{u_k}{8(k+\frac{1}{2})} - \frac{u_k}{8(k+\frac{3}{2})} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}$. [S]
6. Encadrer $u_p - u_n$ (pour $p > n$), puis établir : $\forall n \geq 1, \frac{u_n}{8(n+\frac{1}{2})} \leq L - u_n \leq \frac{L}{8n}$. [S]
7. En déduire la majoration suivante : $\forall n \geq 1, \left|L - \left(1 + \frac{1}{8n}\right)u_n\right| \leq \frac{L}{16n^2}$. [S]
8. Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près ?
Même question avec $\left(1 + \frac{1}{8n}\right)u_n$. [S]

NB : on peut montrer (mais on ne demande pas de le prouver) que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Corrigé du problème

Exercice 1

1. (a) On laisse à Maple le soin de faire les calculs :

```
> u := n->sqrt((n+k)!)/product(1+sqrt(j), j=1..n) ;
```

$$u := n \rightarrow \frac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^n (1+\sqrt{j})}$$

Pour $k = 5$, on calcule u_n avec $1 \leq n \leq 10$, $n = 20$, $n = 50$.

```
> k := 5 : map(n->u[n]=evalf(u(n), 5), [1..10, 20, 50]) ;
```

$[u_1 = 13.417, u_2 = 14.704, u_3 = 15.222, u_4 = 15.222, u_5 = 14.874, u_6 = 14.302,$
 $u_7 = 13.589, u_8 = 12.798, u_9 = 11.972, u_{10} = 11.139, u_{20} = 4.7505, u_{50} = .33147]$ [Q]

- (b) Même calcul, mais avec $k = 10$:

```
> k := 10 : map(n->u[n]=evalf(u(n), 5), [1..10, 20, 50]) ;
```

$[u_1 = 3159.0, u_2 = 4532.8, u_3 = 5982.2, u_4 = 7461.2, u_5 = 8929.7, u_6 = 10355.,$
 $u_7 = 11710., u_8 = 12977., u_9 = 14141., u_{10} = 15194., u_{20} = 19646., u_{50} = 8484.4]$
 [Q]

2. (a) Pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^n (1+\sqrt{j})} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (1+\sqrt{j})}{\sqrt{(n+k-1)!}} = \frac{\sqrt{n+k}}{1+\sqrt{n}}$$

Remarque : en continuant la session Maple de la question précédente, on peut obtenir le résultat à condition de bien spécifier que n et k sont des entiers et d'utiliser successivement les instructions `expand` et `simplify` :

```
> assume(n, posint) : assume(k, posint) :  
'u[n]/u[n-1]'=simplify(expand(u(n)/u(n-1))) ;
```

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\sqrt{n+k}}{1+\sqrt{n}}$$

[Q]

- (b) On a $u_n \leq u_{n-1} \Leftrightarrow \sqrt{n+k} \leq 1 + \sqrt{n} \Leftrightarrow k \leq 1 + 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n \geq \frac{(k-1)^2}{4}$

La suite u est donc décroissante à partir par exemple de $N = \left\lceil \frac{(k-1)^2}{4} \right\rceil + 1$. [Q]

- (c) La suite u est convergente car elle est décroissante (du moins à partir d'un certain rang) et minorée (tous les u_n sont positifs.) [Q]