Trois études de suites

Exercice 1

Soit k un entier naturel fixé. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j})}$.

1. **Quelques valeurs numériques**
   (a) On choisit $k = 5$.
   Calculer u_n avec 5 chiffres significatifs, quand $1 \le n \le 10$, $n = 20$, $n = 50$. [S]
   (b) Même question avec $k = 10$. [S]
2. **Convergence de la suite** (u_n)
   (a) Dans le cas général, calculer le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, pour tout $n \ge 2$. [S]
   (b) En déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang N à préciser. [S]
   (c) Montrer que la suite u est convergente. [S]
3. **Limite de la suite** (u_n)
   (a) Montrer $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que : $n \ge M \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} \le 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ [S]
   (b) Montrer que : $\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \le x$ et que : $\forall\, x > 0,\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$. [S]
   (c) En déduire que : $\forall\, n \ge M,\ \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) \le \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$. [S]
   (d) Conclure à $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$. [S]

Exercice 2

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$. On veut calculer $\lim\limits_{+\infty} u_n$.

1. **Première méthode.**
   On pose, pour tout entier $n \ge 1$: $v_n = \frac{n^n}{n!}$.
   (a) Etablir : $\forall\, x \ge 0,\ 0 \le x - \ln(1+x) \le \frac{x^2}{2}$. [S]
   (b) En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le 1 + \ln(v_n) - \ln(v_{n+1}) \le \frac{1}{2n}$. [S]
   (c) Montrer que : $\forall\, x \in [0,1[,\ x \le -\ln(1-x)$. [S]
   (d) En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln(n)$. [S]
   (e) Prouver finalement que $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n}\ln(v_n) = 1$, puis calculer $\lim\limits_{+\infty} u_n$. [S]
2. **Deuxième méthode.**
   (a) Vérifier que : $\forall\, n \ge 1,\ \ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(n)$. [S]
   (b) En encadrant $\ln(k)$ à l'aide d'intégrales, encadrer $\ln(u_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. [S]

Exercice 3

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{n}\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}$.

1. Calculer u_1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. [S]
2. Prouver par récurrence que $u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$. [S]
3. Montrer : $\exists\, L \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ tel que $\lim\limits_{+\infty} u_n = L$. [S]
4. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ \dfrac{1}{8(x+\frac{1}{2})} \leq (x+\frac{1}{2}) - \sqrt{x(x+1)} \leq \dfrac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$. [S]
5. En déduire que : $\forall\, k \geq 1,\ \frac{u_k}{8(k+\frac{1}{2})} - \frac{u_k}{8(k+\frac{3}{2})} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}$. [S]
6. Encadrer $u_p - u_n$ (pour $p > n$), puis établir : $\forall\, n \geq 1,\ \frac{u_n}{8(n+\frac{1}{2})} \leq L - u_n \leq \frac{L}{8n}$. [S]
7. En déduire la majoration suivante : $\forall\, n \geq 1,\ \left|L - \left(1 + \frac{1}{8n}\right)u_n\right| \leq \frac{L}{16n^2}$. [S]
8. Comment suffit-il de choisir n pour que u_n soit une valeur approchée de L à 10^{-5} près ?
   Même question avec $\left(1 + \frac{1}{8n}\right)u_n$. [S]

   NB : on peut montrer (mais on ne demande pas de le prouver) que $L = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Corrigé du problème

Exercice 1

1. (a) On laisse à Maple le soin de faire les calculs :

```
> u :=n->sqrt((n+k)!)/product(1+sqrt(j),j=1..n);
```

$$u := n \to \frac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j})}$$

Pour $k=5$, on calcule u_n avec $1 \le n \le 10$, $n=20$, $n=50$.

```
> k :=5 : map(n->u[n]=evalf(u(n),5),[$1..10,20,50]);
```

$[u_1 = 13.417,\ u_2 = 14.704,\ u_3 = 15.222,\ u_4 = 15.222,\ u_5 = 14.874,\ u_6 = 14.302,$
$u_7 = 13.589, u_8 = 12.798,\ u_9 = 11.972,\ u_{10} = 11.139,\ u_{20} = 4.7505,\ u_{50} = .33147]$ [Q]

(b) Même calcul, mais avec $k=10$:

```
> k :=10 : map(n->u[n]=evalf(u(n),5),[$1..10,20,50]);
```

$[u_1 = 3159.0,\ u_2 = 4532.8,\ u_3 = 5982.2,\ u_4 = 7461.2,\ u_5 = 8929.7,\ u_6 = 10355.,$
$u_7 = 11710., u_8 = 12977., u_9 = 14141., u_{10} = 15194., u_{20} = 19646., u_{50} = 8484.4]$
[Q]

2. (a) Pour tout entier $n \ge 2$: $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{(n+k)!}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j})}\,\dfrac{\prod_{j=1}^{n-1}(1+\sqrt{j})}{\sqrt{(n+k-1)!}} = \dfrac{\sqrt{n+k}}{1+\sqrt{n}}$

Remarque : en continuant la session Maple de la question précédente, on peut obtenir le résultat à condition de bien spécifier que n et k sont des entiers et d'utiliser successivement les instructions `expand` et `simplify` :

```
> assume(n,posint) :assume(k,posint) :
  'u[n]/u[n-1]'=simplify(expand(u(n)/u(n-1)));
```

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\sqrt{n+k}}{1+\sqrt{n}}$$

[Q]

(b) On a $u_n \le u_{n-1} \Leftrightarrow \sqrt{n+k} \le 1+\sqrt{n} \Leftrightarrow k \le 1+2\sqrt{n} \Leftrightarrow n \ge \frac{(k-1)^2}{4}$

La suite u est donc décroissante à partir par exemple de $N = \left[\frac{(k-1)^2}{4}\right] + 1.$ [Q]

(c) La suite u est convergente car elle est décroissante (du moins à partir d'un certain rang) et minorée (tous les u_n sont positifs.) [Q]