Sous-groupes distingués

Soit G un groupe, qui n'est pas supposé abélien. On note $(a,b) \mapsto ab$ la loi de G.
On note e le neutre de G, et a^{-1} le symétrique de tout élément a de G.

Pour toute partie X non vide de G, et pour tous éléments a, b de G, on pose :

$$aX = \{ax,\ x \in X\} \qquad Xb = \{xb,\ x \in X\} \qquad aXb = a(Xb) = (aX)b = \{axb,\ x \in X\}$$

Les propriétés suivantes sont évidentes et n'ont pas à être démontrées :

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} aX \subset aY \\ Xb \subset Yb \\ aXb \subset aYb \end{cases} \qquad \begin{cases} a(bX) = (ab)X \\ (Xa)\,b = X(ab) \\ a(bXc)d = (ab)X(cd) \end{cases} \qquad eX = Xe = X$$

On rappelle que les automorphismes intérieurs de G sont les applications φ_a définies par :

$$\forall\, a \in G,\ \forall\, x \in G,\ \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

Partie I. Définition des sous-groupes distingués

1. Soit H un sous-groupe de G.

   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) Pour tout a de G, $aH \subset Ha$
   ii) Pour tout a de G, $Ha \subset aH$
   iii) Pour tout a de G, $aH = Ha$

   On dit qu'un sous-groupe H de G est *distingué* s'il vérifie ces conditions. [S]

2. Soit H un sous-groupe d'un groupe G.

   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) H est distingué dans G
   ii) $\forall\, a \in G,\ aHa^{-1} = H$
   iii) $\forall\, a \in G,\ aHa^{-1} \subset H$

   Exprimer cette propriété avec la terminologie des automorphismes intérieurs de G. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Partie II. Exemples de sous-groupes distingués

1. Soit G un groupe. Vérifier que $\{e\}$ et G sont distingués dans G. [S]
2. Que peut-on dire des sous-groupes distingués d'un groupe abélien G ? [S]
3. Soient G et $\widetilde{G}$ deux groupes. Soit $f : G \to \widetilde{G}$ un morphisme de groupes.
   (a) On suppose que $\widetilde{H}$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$.
   Montrer que son image réciproque par f est un sous-groupe distingué H de G. [S]
   (b) Dans cette question, on suppose que le morphisme f est surjectif.
   Soit H un sous-groupe distingué de G.
   Montrer que $\widetilde{H} = f(H)$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$. [S]
   (c) Que dire du noyau de f ? [S]

Partie III. Centre et centralisateurs

Soit G un groupe. Soit X une partie non vide quelconque de G.
On appelle *centralisateur* de X l'ensemble $X' = \{a \in G, \forall\, x \in X, ax = xa\}$.
On appelle *centre* de G l'ensemble $C = \{a \in G, \forall\, x \in G, ax = xa\}$.
Le centre de G est donc le centralisateur G' de G lui-même.

1. (a) Montrer que X' est un sous-groupe de G. [S]
   (b) Montrer que le sous-groupe C est distingué dans G. [S]
2. Avec les automorphismes intérieurs, retrouver que C est distingué dans G. [S]
3. Dans cette question X et Y sont deux parties non vides quelconques de G.
   (a) Vérifier que $X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'$. [S]
   (b) On pose $X'' = (X')'$. Montrer que X est inclus dans X''. [S]
   (c) On pose $X''' = ((X')')'$. Montrer que $X' = X'''$. [S]
4. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe de G.
   (a) Montrer les équivalences : H abélien$\Leftrightarrow H \subset H' \Leftrightarrow H''$ abélien. [S]
   (b) Montrer que si H est distingué, alors H' est distingué. [S]

Partie IV. Produit de deux sous-groupes

Dans cette partie, H et K sont deux sous-groupes quelconques de G.
On pose $HK = \{hk,\ h \in H,\ k \in K\}$ et $KH = \{kh,\ k \in K,\ h \in H\}$.

1. Montrer que $HK \subset KH \Leftrightarrow KH \subset HK \Leftrightarrow HK = KH$. [S]
2. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. [S]
3. On suppose que l'un des deux sous-groupes H ou K est distingué.
   Montrer que $HK = KH$. Conclusion ? [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Partie V. Quotient par un sous-groupe distingué

Soit H un sous-groupe quelconque de G.

On définit sur G une relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
   Quelle est cette relation si $H = G$? si $H = \{e\}$? [S]
2. Vérifier que la classe d'équivalence d'un élément a de G est $\overline{a} = aH$. [S]
3. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe distingué de G.
   On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence de G pour la relation $\mathcal{R}$.
   (a) Soient x et y deux éléments de G. Montrer que $\overline{xy}$ ne dépend que de $\overline{x}$ et de $\overline{y}$. [S]
   (b) On peut donc définir une loi sur G/H en posant : $\forall (x, y) \in G^2$, $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}$.
   Montrer qu'alors G/H est un groupe. Quel est le neutre ? l'inverse de $\overline{x}$?
   On dit que G/H est le *groupe quotient* de G par le sous-groupe distingué H. [S]
   (c) Montrer l'équivalence des deux propriétés :
   – Le groupe G/H est commutatif.
   – Pour tous x, y de G, l'élément $y^{-1}x^{-1}yx$ est dans H.
   [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.