

Sous-groupes distingués

Soit G un groupe, qui n'est pas supposé abélien. On note $(a, b) \mapsto ab$ la loi de G .

On note e le neutre de G , et a^{-1} le symétrique de tout élément a de G .

Pour toute partie X non vide de G , et pour tous éléments a, b de G , on pose :

$$aX = \{ax, x \in X\} \quad Xb = \{xb, x \in X\} \quad aXb = a(Xb) = (aX)b = \{axb, x \in X\}$$

Les propriétés suivantes sont évidentes et n'ont pas à être démontrées :

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} aX \subset aY \\ Xb \subset Yb \\ aXb \subset aYb \end{cases} \quad \begin{cases} a(bX) = (ab)X \\ (Xa)b = X(ab) \\ a(bXc)d = (ab)X(cd) \end{cases} \quad eX = Xe = X$$

On rappelle que les automorphismes intérieurs de G sont les applications φ_a définies par :

$$\forall a \in G, \forall x \in G, \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

Partie I. Définition des sous-groupes distingués

1. Soit H un sous-groupe de G .

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) Pour tout a de G , $aH \subset Ha$
- ii) Pour tout a de G , $Ha \subset aH$
- iii) Pour tout a de G , $aH = Ha$

On dit qu'un sous-groupe H de G est *distingué* s'il vérifie ces conditions. [S]

2. Soit H un sous-groupe d'un groupe G .

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) H est distingué dans G
- ii) $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$
- iii) $\forall a \in G, aHa^{-1} \subset H$

Exprimer cette propriété avec la terminologie des automorphismes intérieurs de G . [S]

Partie II. Exemples de sous-groupes distingués

1. Soit G un groupe. Vérifier que $\{e\}$ et G sont distingués dans G . [S]
2. Que peut-on dire des sous-groupes distingués d'un groupe abélien G ? [S]
3. Soient G et \tilde{G} deux groupes. Soit $f : G \rightarrow \tilde{G}$ un morphisme de groupes.
 - (a) On suppose que \tilde{H} est un sous-groupe distingué de \tilde{G} .
Montrer que son image réciproque par f est un sous-groupe distingué H de G . [S]
 - (b) Dans cette question, on suppose que le morphisme f est surjectif.
Soit H un sous-groupe distingué de G .
Montrer que $\tilde{H} = f(H)$ est un sous-groupe distingué de \tilde{G} . [S]
 - (c) Que dire du noyau de f ? [S]

Partie III. Centre et centralisateurs

Soit G un groupe. Soit X une partie non vide quelconque de G .

On appelle *centralisateur* de X l'ensemble $X' = \{a \in G, \forall x \in X, ax = xa\}$.

On appelle *centre* de G l'ensemble $C = \{a \in G, \forall x \in G, ax = xa\}$.

Le centre de G est donc le centralisateur G' de G lui-même.

1.
 - (a) Montrer que X' est un sous-groupe de G . [S]
 - (b) Montrer que le sous-groupe C est distingué dans G . [S]
2. Avec les automorphismes intérieurs, retrouver que C est distingué dans G . [S]
3. Dans cette question X et Y sont deux parties non vides quelconques de G .
 - (a) Vérifier que $X \subset Y \Rightarrow Y' \subset X'$. [S]
 - (b) On pose $X'' = (X)'$. Montrer que X est inclus dans X'' . [S]
 - (c) On pose $X''' = ((X)')'$. Montrer que $X' = X'''$. [S]
4. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe de G .
 - (a) Montrer les équivalences : H abélien $\Leftrightarrow H \subset H' \Leftrightarrow H''$ abélien. [S]
 - (b) Montrer que si H est distingué, alors H' est distingué. [S]

Partie IV. Produit de deux sous-groupes

Dans cette partie, H et K sont deux sous-groupes quelconques de G .

On pose $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$ et $KH = \{kh, k \in K, h \in H\}$.

1. Montrer que $HK \subset KH \Leftrightarrow KH \subset HK \Leftrightarrow HK = KH$. [S]
2. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$. [S]
3. On suppose que l'un des deux sous-groupes H ou K est distingué.
Montrer que $HK = KH$. Conclusion? [S]

Partie V. Quotient par un sous-groupe distingué

Soit H un sous-groupe quelconque de G .

On définit sur G une relation \mathcal{R} par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur G .

Quelle est cette relation si $H = G$? si $H = \{e\}$? [S]

2. Vérifier que la classe d'équivalence d'un élément a de G est $\bar{a} = aH$. [S]

3. Dans cette question, on suppose que H est un sous-groupe distingué de G .

On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence de G pour la relation \mathcal{R} .

(a) Soient x et y deux éléments de G . Montrer que \overline{xy} ne dépend que de \bar{x} et de \bar{y} . [S]

(b) On peut donc définir une loi sur G/H en posant : $\forall (x, y) \in G^2, \bar{x} \bar{y} = \overline{xy}$.

Montrer qu'alors G/H est un groupe. Quel est le neutre? l'inverse de \bar{x} ?

On dit que G/H est le *groupe quotient* de G par le sous-groupe distingué H . [S]

(c) Montrer l'équivalence des deux propriétés :

- Le groupe G/H est commutatif.
- Pour tous x, y de G , l'élément $y^{-1}x^{-1}yx$ est dans H .

[S]