Dérivations d'un anneau

Soit $(A, +, .)$ un anneau (qui n'est pas supposé commutatif).

On note 1 le neutre multiplicatif, et 0 le neutre additif.

Une application $\delta : A \to A$ est appelée une *dérivation* si :

$$\forall a, b \in A, \quad \begin{cases} \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) & (H_1) \\ \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) & (H_2) \end{cases}$$

Première partie

Soit δ une dérivation de A.

1. Calculer $\delta(0)$ et $\delta(1)$. [S]
2. a étant supposé inversible dans A, exprimer $\delta(a^{-1})$ en fonction de a^{-1} et de $\delta(a)$. [S]
3. Soit $D_\delta = \{a \in A,\ \delta(a) = 0\}$.
   (a) Montrer que D_δ est un sous-anneau de A. [S]
   (b) Montrer que si A est un corps, alors D_δ est un sous-corps de A. [S]
4. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de A, avec $n \geq 2$.
   Calculer $\delta(a_1 a_2 \cdots a_n)$ en fonction des a_k et des $\delta(a_k)$. [S]
5. En déduire $\delta(a^n)$ pour tout a de A et tout $n \geq 2$.
   Que devient cette formule si A est commutatif ? [S]
6. On pose $\delta^0 = \mathrm{Id}_A$, $\delta^1 = \delta$, et $\forall n \geq 1$, $\delta^n = \delta \circ \delta^{n-1}$.
   Montrer par récurrence que : $\forall a, b \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \delta^n(ab) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \delta^p(a)\, \delta^{n-p}(b)$ [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, δ_1, δ_2, δ_3 désignent des dérivations quelconques de A.

1. $\delta_1 + \delta_2$ et $\delta_1 \circ \delta_2$ sont-elles des dérivations de A ? [S]
2. On note $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$.
   Montrer que $[\delta_1, \delta_2]$ est une dérivation de A. [S]
3. Montrer que : $[\delta_1, [\delta_2, \delta_3]] + [\delta_2, [\delta_3, \delta_1]] + [\delta_3, [\delta_1, \delta_2]] = 0_A$ (application nulle de A). [S]

Troisième partie

Pour tout $a \in A$, on note : $\forall x \in A,\ d_a(x) = ax - xa$.

1. Montrer que d_a est une dérivation de A. [S]
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in A,\ d_a^n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p}\, x\, a^p$. [S]
3. En déduire que si a est nilpotent, alors il existe un entier m tel que $d_a^m = 0_A$. [S]
4. Vérifier les égalités, pour tous a, b de A :
   (a) Pour toute dérivation δ de A : $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$. [S]
   (b) En posant $[b, a] = ba - ab$, alors $[d_b, d_a] = d_{[b,a]}$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. Avec $a = b = 0$ ou $a = b = 1$, (H_1) et (H_2) donnent $\begin{cases} \delta(0) = 2\delta(0) \\ \delta(1) = 2\delta(1) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \delta(0) = 0 \\ \delta(1) = 0 \end{cases}$ [Q]
2. Avec $b = a^{-1}$, (H_2) donne $0 = \delta(aa^{-1}) = \delta(a)a^{-1} + a\delta(a^{-1})$ donc $a\delta(a^{-1}) = -\delta(a)a^{-1}$.
   On en tire l'égalité $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1}$. [Q]
3. (a) L'hypothèse (H_1) signifie que δ est un endomorphisme du groupe $(A, +)$.
   L'ensemble D_δ (qui n'est autre que $\ker \delta$) est donc un sous-groupe de $(A, +)$.
   Il reste à vérifier que 1 est dans D_δ (mais on le sait) et que D_δ est stable pour le produit.
   Or si a, b sont dans D_δ, alors $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) = 0b + a0 = 0$. [Q]

   (b) Si A est un corps, soit a un élément non nul de D_δ, c'est-à-dire tel que $\delta(a) = 0$.
   Alors a est inversible dans A et $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1} = 0$ donc a^{-1} est dans D_δ.
   Ainsi D_δ est stable pour le passage à l'inverse des éléments non nuls.
   En plus d'être un sous-anneau, D_δ est donc un sous-corps de A. [Q]
4. On trouve $\delta(a_1a_2a_3) = \delta(a_1a_2)a_3 + a_1a_2\delta(a_3) = (\delta(a_1)a_2 + a_1\delta(a_2))a_3 + a_1a_2\delta(a_3)$.
   Ainsi $\delta(a_1a_2a_3) = \delta(a_1)a_2a_3 + a_1\delta(a_2)a_3 + a_1a_2\delta(a_3)$.
   Par récurrence, on prouve que $\delta\Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr) = \sum_{k=1}^{n}\Bigl[\Bigl(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\Bigr)\delta(a_k)\Bigl(\prod_{j=k+1}^{n} a_j\Bigr)\Bigr]$.
   La propriété est en effet vraie au rang $n = 2$. Supposons qu'elle le soit au rang n.
   On trouve successivement :
   $$\begin{aligned}\delta\Bigl(\prod_{k=1}^{n+1} a_k\Bigr) &= \delta\Bigl(\Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr)a_{n+1}\Bigr) = \delta\Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr)a_{n+1} + \Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\delta(a_{n+1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Bigl[\Bigl(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\Bigr)\delta(a_k)\Bigl(\prod_{j=k+1}^{n} a_j\Bigr)\Bigr]a_{n+1} + \Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\delta(a_{n+1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Bigl[\Bigl(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\Bigr)\delta(a_k)\Bigl(\prod_{j=k+1}^{n+1} a_j\Bigr)\Bigr] + \Bigl(\prod_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\delta(a_{n+1})\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\Bigl[\Bigl(\prod_{j=1}^{k-1} a_j\Bigr)\delta(a_k)\Bigl(\prod_{j=k+1}^{n+1} a_j\Bigr)\Bigr] \text{ ce qui établit la propriété au rang } n+1\end{aligned}$$
   On a ainsi prouvé la propriété pour tout $n \geq 2$. [Q]
5. Pour $a \in A$ et $n \geq 2$, la formule précédente donne $\delta(a^n) = \sum_{k=1}^{n}\Bigl(a_j^{k-1}\delta(a_k)a_j^{n-k}\Bigr)$.
   En particulier, si A est commutatif : $\delta(a^n) = n\delta(a)a^{n-1}$.
   Remarque : le résultat obtenu rappelle la formule $(f^n)' = nf'f^{n-1}$. Rien d'étonnant car si $(A, +, \cdot)$ est l'anneau des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application $\delta : A \to A$ définie par $\delta(f) = f'$ est une ...dérivation.
   La formule $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)a^{-1}$ trouvée en $(3b)$ rappelle bien sûr $(1/f)' = -f'/f^2$.
   Quant à la question suivante, il s'agit ni plus ni moins de redémontrer la formule de Leibniz. [Q]