Dérivations d'un anneau

Soit $(A, +, .)$ un anneau (qui n'est pas supposé commutatif).

On note 1 le neutre multiplicatif, et 0 le neutre additif.

Une application $\delta : A \to A$ est appelée une *dérivation* si :

$$\forall\, a, b \in A, \quad \begin{cases} \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) & (H_1) \\ \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) & (H_2) \end{cases}$$

Première partie

Soit δ une dérivation de A.

1. Calculer $\delta(0)$ et $\delta(1)$. [S]
2. a étant supposé inversible dans A, exprimer $\delta(a^{-1})$ en fonction de a^{-1} et de $\delta(a)$. [S]
3. Soit $D_\delta = \{a \in A,\ \delta(a) = 0\}$.
   (a) Montrer que D_δ est un sous-anneau de A. [S]
   (b) Montrer que si A est un corps, alors D_δ est un sous-corps de A. [S]
4. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de A, avec $n \geq 2$.
   Calculer $\delta(a_1 a_2 \cdots a_n)$ en fonction des a_k et des $\delta(a_k)$. [S]
5. En déduire $\delta(a^n)$ pour tout a de A et tout $n \geq 2$.
   Que devient cette formule si A est commutatif ? [S]
6. On pose $\delta^0 = \mathrm{Id}_A$, $\delta^1 = \delta$, et $\forall\, n \geq 1$, $\delta^n = \delta \circ \delta^{n-1}$.
   Montrer par récurrence que : $\forall\, a, b \in A,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \delta^n(ab) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \delta^p(a)\, \delta^{n-p}(b)$ [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, δ_1, δ_2, δ_3 désignent des dérivations quelconques de A.

1. $\delta_1 + \delta_2$ et $\delta_1 \circ \delta_2$ sont-elles des dérivations de A ? [S]
2. On note $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$.
   Montrer que $[\delta_1, \delta_2]$ est une dérivation de A. [S]
3. Montrer que : $[\delta_1, [\delta_2, \delta_3]] + [\delta_2, [\delta_3, \delta_1]] + [\delta_3, [\delta_1, \delta_2]] = 0_A$ (application nulle de A). [S]

Troisième partie

Pour tout $a \in A$, on note : $\forall\, x \in A$, $d_a(x) = ax - xa$.

1. Montrer que d_a est une dérivation de A. [S]
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, a \in A$, $d_a^n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p}\, x\, a^p$. [S]
3. En déduire que si a est nilpotent, alors il existe un entier m tel que $d_a^m = 0_A$. [S]
4. Vérifier les égalités, pour tous a, b de A :
   (a) Pour toute dérivation δ de A : $[\delta, d_a] = d_{\delta(a)}$. [S]
   (b) En posant $[b, a] = ba - ab$, alors $[d_b, d_a] = d_{[b,a]}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

Première partie

1. Avec $a=b=0$ ou $a=b=1$, (H_1) et (H_2) donnent $\begin{cases}\delta(0)=2\delta(0)\\ \delta(1)=2\delta(1)\end{cases}$ donc $\begin{cases}\delta(0)=0\\ \delta(1)=0\end{cases}$ [Q]

2. Avec $b=a^{-1}$, (H_2) donne $0=\delta(aa^{-1})=\delta(a)a^{-1}+a\delta(a^{-1})$ donc $a\delta(a^{-1})=-\delta(a)a^{-1}$.
On en tire l'égalité $\delta(a^{-1})=-a^{-1}\delta(a)a^{-1}$. [Q]

3. (a) L'hypothèse (H_1) signifie que δ est un endomorphisme du groupe $(A,+)$.
L'ensemble D_δ (qui n'est autre que $\ker\delta$) est donc un sous-groupe de $(A,+)$.
Il reste à vérifier que 1 est dans D_δ (mais on le sait) et que D_δ est stable pour le produit.
Or si a,b sont dans D_δ, alors $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)=0b+a0=0$. [Q]

   (b) Si A est un corps, soit a un élément non nul de D_δ, c'est-à-dire tel que $\delta(a)=0$.
Alors a est inversible dans A et $\delta(a^{-1})=-a^{-1}\delta(a)a^{-1}=0$ donc a^{-1} est dans D_δ.
Ainsi D_δ est stable pour le passage à l'inverse des éléments non nuls.
En plus d'être un sous-anneau, D_δ est donc un sous-corps de A. [Q]

4. On trouve $\delta(a_1a_2a_3)=\delta(a_1a_2)a_3+a_1a_2\delta(a_3)=(\delta(a_1)a_2+a_1\delta(a_2))a_3+a_1a_2\delta(a_3)$.
Ainsi $\delta(a_1a_2a_3)=\delta(a_1)a_2a_3+a_1\delta(a_2)a_3+a_1a_2\delta(a_3)$.
Par récurrence, on prouve que $\delta\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big[\Big(\prod_{j=1}^{k-1}a_j\Big)\delta(a_k)\Big(\prod_{j=k+1}^{n}a_j\Big)\Big]$.
La propriété est en effet vraie au rang $n=2$. Supposons qu'elle le soit au rang n.
On trouve successivement :

$$\begin{aligned}\delta\Big(\prod_{k=1}^{n+1}a_k\Big) &= \delta\Big(\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)a_{n+1}\Big)=\delta\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)a_{n+1}+\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)\delta(a_{n+1})\\ &=\sum_{k=1}^{n}\Big[\Big(\prod_{j=1}^{k-1}a_j\Big)\delta(a_k)\Big(\prod_{j=k+1}^{n}a_j\Big)\Big]a_{n+1}+\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)\delta(a_{n+1})\\ &=\sum_{k=1}^{n}\Big[\Big(\prod_{j=1}^{k-1}a_j\Big)\delta(a_k)\Big(\prod_{j=k+1}^{n+1}a_j\Big)\Big]+\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)\delta(a_{n+1})\\ &=\sum_{k=1}^{n+1}\Big[\Big(\prod_{j=1}^{k-1}a_j\Big)\delta(a_k)\Big(\prod_{j=k+1}^{n+1}a_j\Big)\Big]\ \text{ce qui établit la propriété au rang } n+1\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé la propriété pour tout $n\geq 2$. [Q]

5. Pour $a\in A$ et $n\geq 2$, la formule précédente donne $\delta(a^n)=\sum_{k=1}^{n}\Big(a_j^{k-1}\delta(a_k)a_j^{n-k}\Big)$.
En particulier, si A est commutatif : $\delta(a^n)=n\delta(a)a^{n-1}$.
Remarque : le résultat obtenu rappelle la formule $(f^n)'=nf'f^{n-1}$. Rien d'étonnant car si $(A,+,\cdot)$ est l'anneau des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application $\delta:A\to A$ définie par $\delta(f)=f'$ est une ...dérivation.
La formule $\delta(a^{-1})=-a^{-1}\delta(a)a^{-1}$ trouvée en (3b) rappelle bien sûr $(1/f)'=-f'/f^2$.
Quant à la question suivante, il s'agit ni plus ni moins de redémontrer la formule de Leibniz. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.