Droites de Simson et de Steiner, cercle de Miquel

Dans tout le problème, on se place dans un plan euclidien orienté.

Il est recommandé d'accompagner les raisonnements de figures soigneusement tracées.

Mais une figure ne pourra en aucun cas tenir lieu de démonstration.

Les différentes parties ne sont pas indépendantes, mais tous les résultats utiles pour continuer sont clairement indiqués dans l'énoncé.

Partie I : Cercles et homothéties

On se donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $r > 0$.

1. *Image d'un cercle par une homothétie*

   On se donne une homothétie h de centre H et de rapport $\lambda \neq 0$.

   (a) Montrer que l'image de $\mathcal{C}$ par h est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $h(\Omega)$ et de rayon $|\lambda|\,r$. [S]

   (b) On suppose que le point H n'est pas intérieur au cercle $\mathcal{C}$.
   Montrer que toute tangente à $\mathcal{C}$ passant par H est aussi une tangente à $\mathcal{C}'$. [S]

   (c) On suppose que H appartient à $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont tangents en H. [S]

2. *Homothéties transformant un cercle donné en un autre cercle donné*

   Réciproquement, on se donne un cercle $\mathcal{C}'$ de centre Ω' et de rayon $r' > 0$.

   (a) Déterminer pour quelles homothéties h on a $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. [S]

   (b) On suppose que le cercle $\mathcal{C}'$ est tangent à $\mathcal{C}$ en un point H.

   Montrer qu'il existe une homothétie h, de centre H, telle que $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. [S]

3. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites distinctes, et soit H un point n'appartenant ni à $\mathcal{D}$ ni à $\mathcal{D}'$.
   Une première droite passant par H coupe $\mathcal{D}$ en A et $\mathcal{D}'$ en A'.
   Une seconde droite, distincte de la précédente, coupe $\mathcal{D}$ en B et $\mathcal{D}'$ en B'.
   On note $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les cercles circonscrits respectivement aux triangles AHB et $A'HB'$.
   Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   (a) Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

   (b) Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangents en H.

   [S]

Partie II : Droites de Simson et de Steiner

On se donne trois points non alignés A, B, C.

On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit M un point quelconque du plan.

On note A', B', C' les projections respectives de M sur $(BC), (CA), (AB)$.

1. On suppose que M n'appartient pas aux droites $(BC),(CA),(AB)$.
   (a) Vérifier que M, A', B', C' sont distincts. [S]
   (b) Prouver l'égalité entre angles de droites : $(\widehat{A'B', A'M}) = (\widehat{CA, CM})\ [\pi]$ [S]
   (c) En déduire que A', B', C' sont alignés$\Leftrightarrow$ M appartient à $\mathcal{C}$ (privé ici de A, B, C.) [S]
2. On suppose maintenant que M appartient à l'une des droites $(BC),(CA),(AB)$.
   Montrer que A', B', C' sont alignés $\Leftrightarrow$ M est l'un des trois points A, B, C. [S]

   Les questions 1 et 2 ont donc permis d'établir le résultat suivant :

   > *Les projections d'un point M sur les cotés du triangle ABC sont alignées si et seulement si ce point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.*
   >
   > Pour tout point M de $\mathcal{C}$, l'unique droite $\mathcal{D}_M$ contenant ces trois projections est appelée *droite de Simson* de M relativement au triangle ABC.

3. Quelles sont les droites de Simson des points A, B, C relativement à ABC ? [S]
4. On note H l'orthocentre du triangle ABC (le point de concours des trois hauteurs.)
   On veut ici prouver une propriété classique du point H :

   > *Les symétriques de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport aux cotés du triangle appartiennent au cercle circonscrit.*

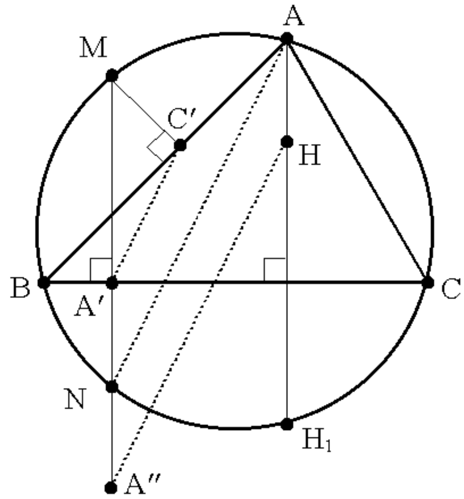
   Dans cette question on suppose donc que M est le symétrique de H par rapport à l'un des cotés du triangle, par exemple le coté (BC).
   Les points A', B', C' désignent encore les projections de M sur $(BC),(CA),(AC)$.
   (a) Montrer l'égalité d'angles de droites $(\widehat{C'M, C'A'}) = (\widehat{BC, BH})\ [\pi]$. [S]
   (b) Prouver qu'on a aussi l'égalité $(\widehat{C'M, C'B'}) = (\widehat{AM, AC})\ [\pi]$. [S]
   (c) En déduire que le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ et conclure. [S]
5. Soient A'', B'', C'' les symétriques respectifs de M par rapport à $(BC),(CA),(AB)$.
   Montrer que A'', B'', C'' sont alignés sur une droite unique Δ_M parallèle à $\mathcal{D}_M$.
   Δ_M est appelée *droite de Steiner* du point M, relativement au triangle ABC.
   Montrer que la droite de Steiner d'un sommet est la hauteur issue de ce sommet. [S]
6. Dans cette question, on veut montrer le résultat suivant :

   > *Pour tout point M du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC, la droite de Steiner de M, relativement au triangle ABC, passe par l'orthocentre H de ce triangle.*

   (a) Vérifier que le résultat est évident si M est l'un des trois points A, B, C. Dans la suite de cette question, on suppose donc M distinct de A, B, C. [S]
   (b) Montrer que la tangente en $\mathcal{C}$ à M est non parallèle à moins deux hauteurs de ABC.
   Sans perdre de généralité, on peut supposer qu'il s'agit de celles issues de A et B. [S]
   (c) Montrer que M ne peut pas être à la fois sur les hauteurs issues de A et B.
   Sans perdre de généralité on peut supposer que M n'est pas sur celle issue de A. [S]

(d) Ces hypothèses permettent de former la figure suivante pour la démonstration :

Par le point M, on mène la parallèle à la hauteur issue de A.
Compte tenu de ce qu'on a supposé sur M, ces deux droites sont distinctes.
Cette parallèle n'est pas une tangente à $\mathcal{C}$ (toujours par hypothèse sur M.)
Elle rencontre donc $\mathcal{C}$ en un point $N \neq M$.
On note H_1 le symétrique de l'orthocentre H par rapport à (BC) (on sait que $H_1 \in \mathcal{C}$.)
A' et A'' ont la signification habituelle.



i. Justifier les égalités d'angles : $(\widehat{NA, NM}) = (\widehat{BA, BM}) = (\widehat{A'C', A'M})$ $[\pi]$. [S]

ii. En déduire que la droite (AN) est parallèle à la droite de Simson $\mathcal{D}_M$ de M. [S]

iii. Justifier les égalités d'angles : $(\widehat{HA'', MA'}) = (\widehat{MA', MH_1}) = (\widehat{AN, AH_1})$ $[\pi]$. [S]

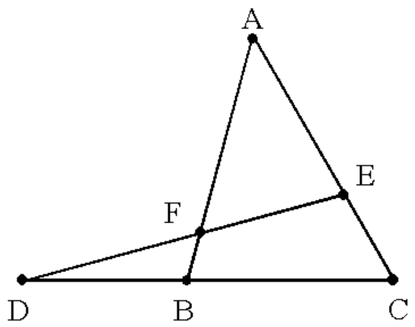
iv. En déduire que les droites (AN) et (HA'') sont parallèles. [S]

v. Conclure et en déduire une construction géométrique simple de la droite de Simson et de la droite de Steiner d'un point M du cercle circonscrit à ABC. [S]

Partie III : Point et cercle de Miquel

On se donne trois points non alignés A, B, C.
Une même droite rencontre respectivement (BC) en D, (CA) en E et (AB) en F.
On suppose que les A, B, C, D, E, F sont distincts.
On dit que $ABCDEF$ est un *quadrilatère complet*.

On voit ci-contre un *exemple* d'une telle situation.



1. Dans cette question, on définit le *point de Miquel* du quadrilatère complet $ABCDEF$.
   On note $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ les cercles circonscrits respectifs de ABC, DBF, AEF, DCE.
   (a) Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en exactement deux points.
   On notera K celui de ces deux points qui est distinct de B. [S]

(b) Montrer que le point K appartient également aux cercles $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.
(On notera K_1, K_2, K_3, K_4 les projections de K sur $(BC), (CA), (AB), (DE)$.) [S]

Ainsi les quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont concourants en K.

Le point K est appelé *point de Miquel* du quadrilatère complet $ABCDEF$.

(c) Montrer que K a la même droite de Steiner par rappport aux quatre triangles ABC, DBF, AEF, DCE. Qu'en déduit-on pour les orthocentres de ces triangles ? [S]

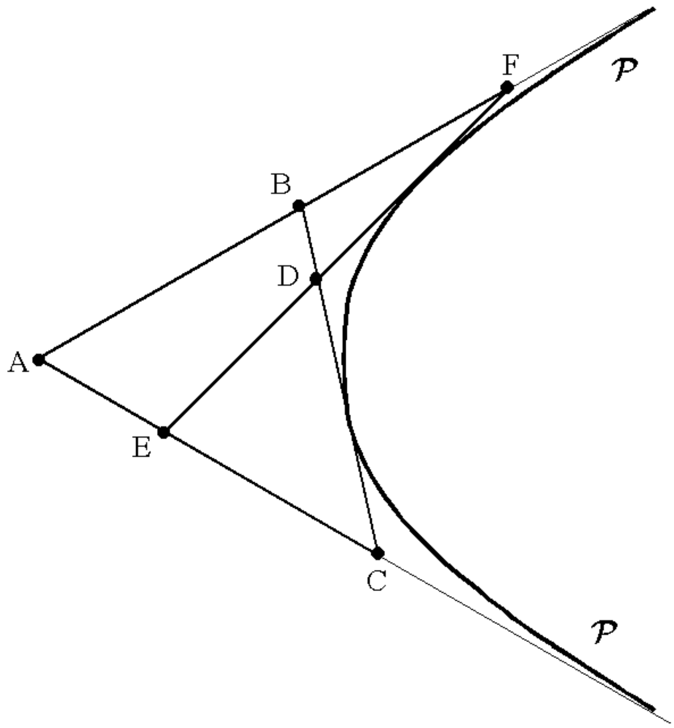
2. Dans cette question, on définit le *cercle de Miquel* du quadrilatère complet $ABCDEF$.
On note $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ les centres des cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$.
(a) Montrer que les quatre points $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ sont distincts. [S]
(b) Montrer que les quatre points $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ ne sont pas alignés. [S]
(c) Montrer l'égalité des angles de droites : $(\widehat{AF, AE}) = (\widehat{\Omega_3\Omega_2, \Omega_3\Omega_4})\ [\pi]$. [S]
(d) Montrer l'égalité des angles de droites : $(\widehat{AB, AC}) = (\widehat{\Omega_1\Omega_2, \Omega_1\Omega_4})\ [\pi]$. [S]
(e) En déduire que les points $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ sont cocycliques. [S]
3. Dans cette question on montre que le point de Miquel appartient au cercle de Miquel.
On note K_2, K_4 les points diamétralement opposés à K sur $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4$.
(a) Montrer que les points D, K_2, K_4 sont alignés. [S]
(b) Prouver que $(\widehat{K\Omega_2, K\Omega_4}) = (\widehat{KB, KC})\ [\pi]$. [S]
(c) Montrer que le point K est sur le cercle passant par $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$. [S]
4. Dans cette question, on voit une utilisation d'un point de Miquel, comme centre de l'unique similitude positive transformant un segment donné en un autre segment donné.
On reprend la figure formée par le quadrilatère complet $ABCDEF$.
(a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f telle que $f(A)=C$ et $f(F)=D$. [S]
(b) On note I le centre de cette similitude (qui n'est pas une translation) et α son angle.
Montrer que le point I ne peut pas être égal à B. [S]
(c) Montrer que $(\widehat{IA, IC}) = (\widehat{BA, BC})\ [\pi]$ et $(\widehat{IF, ID}) = (\widehat{BF, BD})\ [\pi]$ [S]
(d) En déduire que I est le point de Miquel du quadrilatère complet $ABCDEF$. [S]

Partie IV : Paraboles tritangentes à un triangle

1. Dans cette question, on rappelle une propriété classique de la parabole.
(a) Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.
Soit M un point de $\mathcal{P}$ et soit Δ_M la tangente en M à la parabole $\mathcal{P}$.
Montrer que la projection K de M sur Δ_M appartient à la tangente en S à $\mathcal{P}$.
Montrer que le symétrique H de M par rapport à Δ_M appartient à $\mathcal{D}$. [S]

(b) Réciproquement, soit N un point de la directrice $\mathcal{D}$.
Soit Δ_N la médiatrice du segment $[N, F]$.
Montrer que la droite Δ_N est une tangente à la parabole $\mathcal{P}$. [S]

2. Dans cette question on examine une condition nécessaire et suffisante pour qu'une parabole soit tangente aux trois cotés d'un triangle ABC (on parle d'une parabole *tritangente*.)
On donne trois points non alignés A, B, C. On note $\mathcal{C}$ leur cercle circonscrit.
   (a) Soit $\mathcal{P}$ une parabole tritangente au triangle ABC.
   Montrer que le foyer F de $\mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{C}$ et qu'il est distinct de A, B, C. [S]
   (b) Réciproquement, soit F un point du cercle $\mathcal{C}$, distinct de A, B, C.
   Soit $\mathcal{D}$ la droite de Steiner de F, relativement au triangle ABC.
   Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directice $\mathcal{D}$ est tritangente à ABC. [S]
3. Dans cette question, $ABCDEF$ est un quadrilatère complet (cf début de la partie III).
Montrer qu'il existe une unique parabole $\mathcal{P}$ tangente aux droites $(AB), (AC), (BC), (DE)$.
On dit qu'une telle parabole est *quadritangente* au quadrilatère complet $ABCDEF$.
On précisera le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$. [S]



Corrigé du problème

Partie I : Cercles et homothéties

1. *Image d'un cercle par une homothétie*

   (a) Soit M un point quelconque du plan, et $M' = h(M)$ son image par h.
   On sait que h est bijective, h^{-1} étant l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{\lambda}$.
   On a $\overrightarrow{\Omega' M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ car l'application linéaire associée à h est $\lambda \mathrm{Id}$.
   En particulier $\|\overrightarrow{\Omega' M'}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{\Omega M}\|$.
   Ainsi : $M' \in h(\mathcal{C}) \Leftrightarrow M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\| = r \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega' M'}\| = |\lambda| \, r$.
   L'ensemble $h(\mathcal{C})$ est donc bien le cercle de centre Ω' et de rayon $|\lambda| \, r$. [Q]

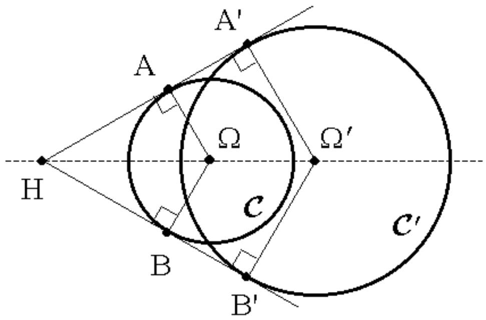
   (b) Soit $\mathcal{D}$ une tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par H (cf figure ci-dessous.)
   Soit A le point de contact entre cette tangente et le cercle $\mathcal{C}$. Soit $A' = h(A)$.
   La droite $\mathcal{D}$, qui passe par H, est globalement invariante par l'homothétie h.
   Ainsi le point A' appartient à $\mathcal{D}$ et bien sûr à $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.
   Les droites (ΩA) et $(\Omega' A')$ sont parallèles (on en effet $\overrightarrow{\Omega' A'} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$.)
   On en déduit que la droite $(\Omega' A')$, toute comme (ΩA), est orthogonale à $\mathcal{D}$.
   Ainsi la droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}'$ au point $A' = h(A)$. [Q]

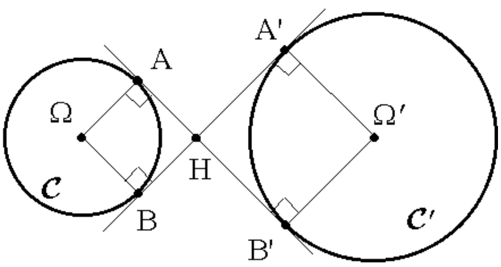
   (c) Soit $\mathcal{D}$ la tangente en $\mathcal{C}$ au point H
   D'après ce qui précède, la droite $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}'$, au point $h(H) = H$.
   Les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont donc la même tangente en leur point commun H.
   Autrement dit, ces deux cercles sont tangents en H. [Q]

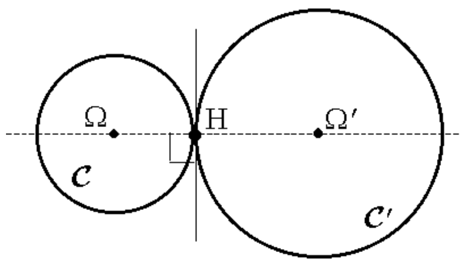
On voit ici trois configurations possibles.

Dans les 2 premières H est extérieur à $\mathcal{C}$.
Dans la 1ère, $\lambda > 0$. Dans la 2nde, $\lambda < 0$.

Dans la troisième H est sur $\mathcal{C}$.
Dans ce cas, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents.







2. *Homothéties transformant un cercle donné en un autre cercle donné*

   (a) D'après la question précédente, on sait que l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie h de rapport λ est le cercle de centre $h(\Omega)$ et de rayon $|\lambda|\,r$.

   Comme un cercle est déterminé de manière unique par la donnée de son centre et de son rayon, on a $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ si et seulement si $h(\Omega) = \Omega'$ et $r' = |\lambda|\,r$.

   On note H le centre de l'homothétie h, si elle existe.

   La condition $h(\Omega) = \Omega'$ s'écrit $\Omega' = H + \lambda\overrightarrow{H\Omega} = \lambda\Omega + (1-\lambda)H$.

   Cette condition équivaut donc à $(1-\lambda)H = \Omega' - \lambda\Omega$.

   – Si $r' \neq r$, la condition sur λ donne $\lambda = \varepsilon\frac{r'}{r}$ avec $\varepsilon = \pm1$.

     Ces deux solutions sont distinctes de 1.

     Pour chacune d'elles, on trouve un centre unique $H = \dfrac{\Omega' - \lambda\Omega}{1-\lambda} = \dfrac{r\Omega' - \varepsilon r'\Omega}{r - \varepsilon r'}$.

     On note que H est le barycentre de $(\Omega, -\varepsilon r')$ et de (Ω', r).

     Si $\Omega = \Omega'$ (c'est-à-dire si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont concentriques) alors évidemment $H = \Omega = \Omega'$, et les deux homothéties obtenues sont réciproques l'une de l'autre.

     Sinon le point H est sur la droite $(\Omega\Omega')$, ce qui était à prévoir.

     Résumons-nous. Si $r' \neq r$, on obtient deux solutions distinctes :

     ◇ L'homothétie de rapport $\lambda = \frac{r'}{r}$, de centre le barycentre H de $(\Omega, -r')$, (Ω', r).

       Si $\Omega \neq \Omega'$, le point H est à l'extérieur du segment $[\Omega, \Omega']$.

       Il est du coté de Ω si $r' > r$, et il est du coté de Ω' si $r' < r$.

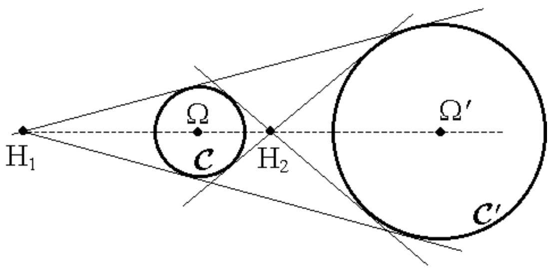
     ◇ L'homothétie de rapport $\lambda = -\frac{r'}{r}$, de centre le barycentre H de (Ω, r'), (Ω', r).

       Si $\Omega \neq \Omega'$, le point H est à l'intérieur du segment $[\Omega, \Omega']$.

       Il est plus proche de Ω si $r' > r$, et il est plus proche de Ω' si $r' < r$.

     On a représenté ici le cas où $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ (de rayons distincts) sont extérieurs l'un à l'autre.

     Les centres H_1, H_2 des homothéties transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ sont extérieurs aux deux cercles. Ces sont les points de concours des paires de tangentes communes.



   – Si $r = r'$, la condition sur λ donne $\lambda = \pm1$.

     ◇ Pour $\lambda = -1$, on trouve $H = \frac{1}{2}(\Omega + \Omega')$.

       L'homothétie obtenue est la symétrie par rapport au milieu de $[\Omega, \Omega']$.