Noyaux et images itérés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit f un endomorphisme de E.
On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, et pour tout entier $k \geq 1$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

1. Montrer que $(\mathrm{Im}\, f^k)_{k\geq 0}$ et $(\mathrm{Ker}\, f^k)_{k\geq 0}$ forment respectivement une suite décroissante et une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E stables par f. [S]
2. Montrer que si $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$, alors $\forall\, m \geq k :\ \mathrm{Ker}\, f^m = \mathrm{Ker}\, f^k$. [S]
3. Montrer que si $\mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$, alors $\forall\, m \geq k :\ \mathrm{Im}\, f^m = \mathrm{Im}\, f^k$ [S]
4. Montrer successivement :
   (a) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$. [S]
   (b) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2 \iff \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{\overrightarrow{0}\}$. [S]
   (c) $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. [S]
5. Soit s (en supposant qu'il existe) le plus petit k tel que $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$.
   Soit r (en supposant qu'il existe) le plus petit k tel que $\mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$.
   On veut montrer que $r = s$.
   (a) Montrer que si $s \leq r$, alors $\mathrm{Im}\, f^s = \mathrm{Im}\, f^r$, puis $s = r$. [S]
   (b) Prouver que si $r \leq s$, alors $\mathrm{Ker}\, f^s = \mathrm{Ker}\, f^r$, puis $s = r$. [S]
   (c) Conclure à l'égalité $r = s$. [S]
   (d) Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f^r \oplus \mathrm{Ker}\, f^r$. [S]
   (e) Etablir que la restriction de f à $\mathrm{Ker}\, f^r$ est nilpotente. [S]
   (f) Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f^r$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}\, f^r$. [S]
6. On suppose que E est de dimension finie n.
   (a) Montrer que les entiers r et s existent, et que $r = s \leq n$. [S]
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. [S]
7. Donner un exemple des situations suivantes :
   (a) L'entier r existe, mais pas l'entier s. [S]
   (b) L'entier s existe, mais pas l'entier r. [S]
   (c) Aucun des entiers r et s n'existe. [S]

Corrigé du problème

1. Pour tout entier naturel k, $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$ sont des sous-espaces vectoriels de E (car ils sont le noyau et l'image de f^k qui est un endomorphisme de E.)

   D'autre part $x \in \operatorname{Ker} f^k \Rightarrow f^k(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f^{k+1}(x) = \overrightarrow{0} \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

   Enfin $y \in \operatorname{Im} f^{k+1} \Rightarrow (\exists x \in E, y = f^{k+1}(x)) \Rightarrow y = f^k(x')$ avec $x' = f(x)$.

   On a donc vérifié les inclusions, pour tout entier k :

   – $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$: la suite des $\operatorname{Ker} f^k$ est croissante.

   – $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$: la suite des $\operatorname{Im} f^k$ est décroissante.

   Enfin, puisque f^k commute avec f, le noyau et l'image de f^k sont stables par f (c'est une propriété classique du cours.)

   On peut aussi remarquer que, pour tout entier naturel k :

   – Si x est dans $\operatorname{Ker} f^k$, alors $f(x)$ est dans $\operatorname{Ker} f^{k-1}$ donc dans $\operatorname{Ker} f^k$.

   – Si y est dans $\operatorname{Im} f^k$, alors $f(y)$ est dans $\operatorname{Im} f^{k+1}$ donc dans $\operatorname{Im} f^k$.

   [Q]

2. On demande de prouver que si $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$ alors la suite des $\operatorname{Ker} f^m$ est stationnaire à partir de $m = k$. Il suffit pour cela de prouver que si $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$ alors $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^{k+2}$, et la conclusion en découle par une récurrence évidente.

   Compte tenu de la croissance de la famille des noyaux itérés, il suffit de démontrer que si $\operatorname{Ker} f^{k+1} \subset \operatorname{Ker} f^k$ alors $\operatorname{Ker} f^{k+2} \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

   En effet, supposons $\operatorname{Ker} f^{k+1} \subset \operatorname{Ker} f^k$ et soit x un élément de $\operatorname{Ker} f^{k+2}$.

   Alors $f^{k+2}(x) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $f^{k+1}(f(x)) = \overrightarrow{0}$.

   Autrement dit $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} f^{k+1}$ donc à $\operatorname{Ker} f^k$.

   Il s'ensuit que $f^k(f(x)) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$, ce qu'il fallait démontrer. [Q]

3. Il suffit là encore de prouver que si $\operatorname{Im} f^k \subset \operatorname{Im} f^{k+1}$ alors $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^{k+2}$.

   Avec cette hypothèse, soit y un élément de $\operatorname{Im} f^{k+1}$.

   Par définition il existe un élément x de E tel que $y = f^{k+1}(x)$, donc $y = f(f^k(x))$.

   Le vecteur $z = f^k(x)$ est dans $\operatorname{Im} f^k$ donc dans $\operatorname{Im} f^{k+1}$.

   Il existe donc un vecteur x' de E tel que $z = f^{k+1}(x')$.

   On en déduit que $y = f(z) = f^{k+2}(x)$: y appartient bien à $\operatorname{Im} f^{k+2}$. [Q]

4. (a) – On suppose que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Soit x un élément quelconque de E.

   $f(x)$ est dans $\operatorname{Im} f$ donc dans $\operatorname{Im} f^2$: il existe x' dans E tel que $f(x) = f^2(x')$.

   Avec cette notation, on constate que $f(x - f(x')) = \overrightarrow{0}$.

   Le vecteur $x'' = x - f(x')$ est donc un élément de $\operatorname{Ker} f$.

   L'égalité $x = f(x') + x''$ est bien la décomposition de x comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f$.

   On a donc prouvé que E est la somme des sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.