Dérangements entre ensembles finis

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, et on note S_n l'ensemble des *permutations* de E_n, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de E_n dans lui-même.

Pour tout f de S_n et pour tout k de E_n, on dit que k est un *point fixe* de f si $f(k) = k$.

On dit qu'un élément f de S_n est un *dérangement* de E_n si f ne possède aucun point fixe.

On note D_n le nombre de dérangements de E_n. Par convention, on pose $D_0 = 1$.

On généralise cette définition en disant qu'une bijection f d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sur un ensemble $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est un dérangement de A sur B (ainsi ordonnés) si pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$, on a $f(a_i) = b_j$ avec $j \neq i$. Il est clair qu'il y a alors autant de dérangements de A sur B qu'il y en a de E_n dans lui-même.

1. Que valent D_1 et D_2 ? [S]
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$.

   Indication : on cherchera à former un dérangement quelconque f de E_{n+2}, avec $n \geq 1$.

   Pour cela, on considèrera $k = f(n+2)$ et on s'intéressera à $f(k)$.

   [S]
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. [S]
4. Dans cette question, on retrouve le résultat de (3) mais par une autre méthode.

   Pour tout entier $k \geq 1$, et pour tout q de $\{0, \ldots, k\}$, on note $D_{k,q}$ le nombre des permutations de E_k qui ont exactement q points fixes. Ainsi $D_{k,0} = D_k$.

   Par convention on pose encore $D_{0,0} = 1$.

   (a) Montrer que $0 \leq q \leq k \leq n \Rightarrow \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^q = \mathrm{C}_n^q \mathrm{C}_{n-q}^{k-q}$. [S]

   (b) En déduire que, si $0 \leq q < n$, alors $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^q = 0$ (et si $q = n$?). [S]

   (c) Prouver que pour tout $k \geq 0$, on a $k! = \displaystyle\sum_{r=0}^{k} D_{k,r} = \sum_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q D_q$. [S]

   (d) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $D_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k k!$ [S]

   (e) Retrouver ainsi le résultat de la question 3. [S]
5. On considère n boules discernables, placées initialement dans n tiroirs distincts, à raison d'une boule par tiroir. On sort les n boules, puis on les replace aléatoirement, toujours à raison d'une boule par tiroir. On note X la variable aléatoire discrète représentant le nombre de boules ayant retrouvé leur tiroir d'origine.

   (a) Montrer que $p(X = q) = \dfrac{1}{q!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$ [S]

   (b) Exprimer de même la probabilité de l'événement $X \geq 1$. [S]

   (c) Montrer que l'espérance de X est égale à 1. On proposera deux méthodes. [S]

   (d) Calculer la variance de X. [S]

Corrigé du problème

1. Il n'y a qu'une application de E_1 dans lui-même, qui est bijective, mais n'est évidemment pas un dérangement ! Autrement dit : $D_1 = 0$.

   Il y a deux permutations de E_2 : l'identité et f définie par $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$.
   Seule cette dernière est un dérangement. Ainsi $D_2 = 1$. [Q]

2. Remarquons tout d'abord que la formule $D_{n+2} = (n+1)(D_n + D_{n+1})$ est vraie si $n = 0$ (avec la convention de l'énoncé, stipulant que $D_0 = 1$).

   Dans la suite de cette démonstration, on peut donc supposer $n \geq 1$.

   On cherche à former un des D_{n+2} dérangements possibles f de E_{n+2}.

   On choisit d'abord $k = f(n+2)$ parmi les $n+1$ éléments de $E_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

   On se propose ensuite de choisir $f(k)$. Il a deux cas possibles :

   – *Premier cas : $f(k) = n+2$.*

     L'application f échange donc les éléments k et $n+2$.

     La restriction g de f à $F_n = E_{n+2} \setminus \{k, n+2\}$ est une application de F_n dans lui-même.

     Mais f est un dérangement de E_{n+2} si et seulement si g est un dérangement de F_n.

     Puisque $\text{Card}(F_n) = n$, il y a D_n façons de définir g, donc f.

   – *Deuxième cas : $f(k) \neq n+2$.*

     On considère les ensembles E_{n+1} et G_{n+1}, ordonnés comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} E_{n+1} & = \{ \;\; 1 \;\; 2 \;\; \ldots \;\; k-1 \;\;\;\; k \;\;\;\; k+1 \;\; \ldots \;\; n+1 \;\; \} \\ G_{n+1} & = \{ \;\; 1 \;\; 2 \;\; \ldots \;\; k-1 \;\; n+2 \;\; k+1 \;\; \ldots \;\; n+1 \;\; \} \end{array}$$

     La restriction h de f à E_{n+1} est une application de E_{n+1} sur G_{n+1}.

     Dire que f est un dérangement de E_{n+2}, c'est dire que h est un dérangement de E_{n+1} sur G_{n+1} (au sens de la généralisation de la définition, vue au début de l'énoncé).
     Il y a D_{n+1} façons différentes de définir h, c'est-à-dire de compléter la définition de f.

   Ainsi, après les $n+1$ choix possibles de $f(n+2)$, il y a $D_n + D_{n+1}$ façons de compléter f pour en faire un dérangement de E_{n+2}.

   Conclusion : le nombre de dérangements de E_{n+2} s'écrit $D_{n+2} = (n+1)(D_n + D_{n+1})$. [Q]

3. On démontre la propriété par une récurrence de pas 2.

   Remarquons tout d'abord que le résultat est vrai si $n = 0$ ou $n = 1$.

   En effet, pour $n = 0$, $\quad n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} = 1 = D_0$.

   De même, pour $n = 1$, $\quad n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} = 1 - 1 = 0 = D_1$.

   On suppose maintenant que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, avec $n \geq 0$.