

Trois relations identiques dans $\mathcal{P}(E)$

Etant donné un ensemble E , on désigne par \mathcal{M} une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}, \exists Z \in \mathcal{M}, \text{ tel que } Z \subset X \cap Y.$$

1. Montrer que pour tout ensemble E , il existe de telles parties \mathcal{M} de $\mathcal{P}(E)$. [S]
2. On associe à \mathcal{M} une relation binaire \mathcal{R} définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ telque } A \cap X = B \cap X$$

- (a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. [S]
 - (b) Montrer que \mathcal{R} est l'égalité si et seulement si $\mathcal{M} = \{E\}$. [S]
 - (c) Montrer que \mathcal{R} est l'équivalence universelle si et seulement si $\emptyset \in \mathcal{M}$. [S]
3. On note \widehat{A} la classe d'équivalence, pour \mathcal{R} , d'une partie A quelconque de E .
 - (a) Déterminer \widehat{E} et $\widehat{\emptyset}$. [S]
 - (b) Montrer que si $A \in \widehat{E}$ et $B \in \widehat{E}$, alors $A \cap B \in \widehat{E}$. [S]
 - (c) On pose $\mathcal{N} = \widehat{E}$, et dans $\mathcal{P}(E)$ on désigne par \mathcal{S} la relation :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{S} B \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{N} \text{ telque } A \cap Y = B \cap Y$$

Montrer que les relations \mathcal{R} et \mathcal{S} sont identiques. [S]

4. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la différence symétrique :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Soit \mathcal{T} la relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{T} B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ telque } (A \Delta B) \cap X = \emptyset$$

- (a) Montrer que les relations \mathcal{T} et \mathcal{R} sont identiques. [S]
 - (b) A, A', B, B' étant des parties de E telles que $A \mathcal{R} A'$ et $B \mathcal{R} B'$, montrer que :
 $(A \cap B) \mathcal{R} (A' \cap B')$, $(A \cup B) \mathcal{R} (A' \cup B')$, $\overline{A} \mathcal{R} \overline{A'}$, et $(A \Delta B) \mathcal{R} (A' \Delta B')$. [S]
5. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{P}(E)$ pour la relation \mathcal{R} dans les cas suivants :
 - (a) $\mathcal{M} = \{E\}$. [S]
 - (b) $\emptyset \in \mathcal{M}$. [S]
 - (c) $\mathcal{M} = \{\{x\}\}$, où $x \in E$. [S]
 - (d) $\mathcal{M} \supset \{\{x\}, \{y\}\}$, où x, y sont deux éléments distincts de E . [S]

Corrigé du problème

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$ convient. [Q]

2. (a) – *Réflexivité*

Soit A dans $\mathcal{P}(E)$. Puisque $\mathcal{M} \neq \emptyset$, soit X un élément de \mathcal{M} .

On a... $A \cap X = A \cap X$, ce qui prouve $A \mathcal{R} A$.

– *Symétrie*

Elle est évidente par définition (car X, Y jouent le même rôle.)

– *Transitivité*

Soient A, B, C dans $\mathcal{P}(E)$, tels que : $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$.

Il existe X et Y dans \mathcal{M} tels que $A \cap X = B \cap X$ et $B \cap Y = C \cap Y$.

On sait qu'il existe Z dans \mathcal{M} tel que $Z \subset X \cap Y$.

On en déduit
$$\begin{cases} A \cap X \cap Z = B \cap X \cap Z \\ B \cap Y \cap Z = C \cap Y \cap Z \end{cases}$$

puis
$$\begin{cases} A \cap Z = B \cap Z \\ B \cap Z = C \cap Z \end{cases} \quad \text{car } X \cap Z = Z \text{ et } Y \cap Z = Z.$$

Ainsi $A \cap Z = C \cap Z$, et Z est élément de \mathcal{M} . Donc $A \mathcal{R} C$.

– *Conclusion*

\mathcal{R} est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

[Q]

(b) – *Supposons $\mathcal{M} = \{E\}$*

Pour tous A et B de $\mathcal{P}(E)$, $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap E = B \cap E \Leftrightarrow A = B$.

La relation \mathcal{R} est donc l'égalité.

– *Réciproquement*

On suppose que \mathcal{M} est différent de $\{E\}$. Montrons que \mathcal{R} n'est pas l'égalité.

Puisque $\mathcal{M} \neq \emptyset$, il existe X dans \mathcal{M} , avec $X \neq E$.

On constate que $X \mathcal{R} E$ (car $X \cap X = E \cap X$ et $X \in \mathcal{M}$.)

Or X et E sont distincts : \mathcal{R} n'est pas donc pas la relation égalité.

– *Conclusion*

\mathcal{R} est la relation "égalité" $\Leftrightarrow \mathcal{M}$ se réduit au singleton $\{E\}$.

[Q]

(c) – *Supposons $\emptyset \in \mathcal{M}$*

Pour tous A, B de $\mathcal{P}(E)$ on a alors $A \mathcal{R} B$ car $A \cap \emptyset = B \cap \emptyset$.

\mathcal{R} est donc l'équivalence universelle.