Trois relations identiques dans $\mathcal{P}(E)$

Etant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

$$\forall\, X, Y \in \mathcal{M},\ \exists\, Z \in \mathcal{M},\ \text{ tel que } Z \subset X \cap Y.$$

1. Montrer que pour tout ensemble E, il existe de telles parties $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$. [S]
2. On associe à $\mathcal{M}$ une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M} \text{ telque } A \cap X = B \cap X$$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{R}$ est l'égalité si et seulement si $\mathcal{M} = \{E\}$. [S]
   (c) Montrer que $\mathcal{R}$ est l'équivalence universelle si et seulement si $\emptyset \in \mathcal{M}$. [S]

3. On note $\widehat{A}$ la classe d'équivalence, pour $\mathcal{R}$, d'une partie A quelconque de E.
   (a) Déterminer $\widehat{E}$ et $\widehat{\emptyset}$. [S]
   (b) Montrer que si $A \in \widehat{E}$ et $B \in \widehat{E}$, alors $A \cap B \in \widehat{E}$. [S]
   (c) On pose $\mathcal{N} = \widehat{E}$, et dans $\mathcal{P}(E)$ on désigne par $\mathcal{S}$ la relation :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{S} B \Leftrightarrow \exists\, Y \in \mathcal{N} \text{ telque } A \cap Y = B \cap Y$$

   Montrer que les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont identiques. [S]

4. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la différence symétrique :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

   Soit $\mathcal{T}$ la relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{T} B \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathcal{M} \text{ telque } (A \Delta B) \cap X = \emptyset$$

   (a) Montrer que les relations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ sont identiques. [S]
   (b) A, A', B, B' étant des parties de E telles que $A \mathcal{R} A'$ et $B \mathcal{R} B'$, montrer que :
   $(A \cap B) \mathcal{R} (A' \cap B')$, $(A \cup B) \mathcal{R} (A' \cup B')$, $\bar{A} \mathcal{R} \overline{A'}$, et $(A \Delta B) \mathcal{R} (A' \Delta B')$. [S]

5. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\mathcal{R}$ dans les cas suivants :
   (a) $\mathcal{M} = \{E\}$. [S]
   (b) $\emptyset \in \mathcal{M}$. [S]
   (c) $\mathcal{M} = \{\{x\}\}$, où $x \in E$. [S]
   (d) $\mathcal{M} \supset \{\{x\}, \{y\}\}$, où x, y sont deux éléments distincts de E. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

1. $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$ convient. [Q]
2. (a) – *Réflexivité*

   Soit A dans $\mathcal{P}(E)$. Puisque $\mathcal{M} \neq \emptyset$, soit X un élément de M.

   On a... $A \cap X = A \cap X$, ce qui prouve $A \mathcal{R} A$.

   – *Symétrie*

   Elle est évidente par définition (car X, Y jouent le même rôle.)

   – *Transitivité*

   Soient A, B, C dans $\mathcal{P}(E)$, tels que : $A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C$.

   Il existe X et Y dans $\mathcal{M}$ tels que $A \cap X = B \cap X$ et $B \cap Y = C \cap Y$.

   On sait qu'il existe Z dans $\mathcal{M}$ tel que $Z \subset X \cap Y$.

   On en déduit $\begin{cases} A \cap X \cap Z = B \cap X \cap Z \\ B \cap Y \cap Z = C \cap Y \cap Z \end{cases}$

   puis $\begin{cases} A \cap Z = B \cap Z \\ B \cap Z = C \cap Z \end{cases}$ car $X \cap Z = Z$ et $Y \cap Z = Z$.

   Ainsi $A \cap Z = C \cap Z$, et Z est élément de $\mathcal{M}$. Donc $A \mathcal{R} C$.

   – *Conclusion*

   $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

   [Q]

   (b) – *Supposons* $\mathcal{M} = \{E\}$

   Pour tous A et B de $\mathcal{P}(E)$, $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap E = B \cap E \Leftrightarrow A = B$.

   La relation $\mathcal{R}$ est donc l'égalité.

   – *Réciproquement*

   On suppose que $\mathcal{M}$ est différent de $\{E\}$. Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas l'égalité.

   Puisque $\mathcal{M} \neq \emptyset$, il existe X dans $\mathcal{M}$, avec $X \neq E$.

   On constate que $X \mathcal{R} E$ (car $X \cap X = E \cap X$ et $X \in \mathcal{M}$.)

   Or X et E sont distincts : $\mathcal{R}$ n'est pas donc pas la relation égalité.

   – *Conclusion*

   $\mathcal{R}$ est la relation "égalité" $\Leftrightarrow \mathcal{M}$ se réduit au singleton$\{E\}$.

   [Q]

   (c) – *Supposons* $\emptyset \in \mathcal{M}$

   Pour tous A, B de $\mathcal{P}(E)$ on a alors $A \mathcal{R} B$ car $A \cap \emptyset = B \cap \emptyset$.

   $\mathcal{R}$ est donc l'équivalence universelle.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.