Quatre études de fonctions

Exercice 1

On définit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{|x(x+2)|}$.

1. Préciser le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f. [S]
2. Indiquer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = -2$ et au voisinage de $x = 0$. [S]
3. Étudier le sens de variations de f, et dresser son tableau de variations. [S]
4. Étudier l'existence d'une asymptote oblique quand $x \to -\infty$ ou quand $x \to +\infty$.
   Donner le placement de la courbe par rapport à cette asymptote. [S]
5. Étudier la concavité de f et préciser les points d'inflexion. [S]
6. Tracer soigneusement la courbe représentative de f. [S]

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = |\tan x|^{\cos x}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?
   Montrer qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $]0, \pi[$.
   Pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire ? [S]
2. Montrer que l'application f peut être prolongée par continuité en $x = 0$ et en $x = \frac{\pi}{2}$. [S]
3. Étudier le sens de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et dresser son tableau de variations.
   On donnera une valeur approchée de l'abscisse x_0 pour laquelle $f'(x_0) = 0$.
   Procéder à une étude analogue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ [S]
4. Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = \frac{\pi}{2}$. [S]
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f sur un intervalle contenant $[0, \pi]$. [S]

Exercice 3

On considère l'application f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f. Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?
   Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition. [S]
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. [S]
3. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$, de $x = 1$, et de $+\infty$. [S]
4. Tracer soigneusement la courbe représentative de f. [S]

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x > -1$ (et $x \neq 0$) : $\exists!\theta_x \in]0,1[$ tel que $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+\theta_x x}$. [S]
2. On définit l'application f par $f(x) = \theta_x$.

   Préciser la dérivabilité de f, et donner les limites de f aux bornes de son domaine. [S]
3. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. [S]
4. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -1$. [S]
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f. [S]

Corrigé du problème

Exercice 1

1. f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, comme produit et composée d'applications continues.
   Elle est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,-2\,[\cup]-2,0\,[\cup]\,0,+\infty[$. [Q]
2. – Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x)\sim|x|$ donc $\lim\limits_{\infty} f=+\infty$.

   – L'application f est continue en -2, avec $f(-2)=0$.

   – Au voisinage de 0, on a $f(x)\sim\sqrt{2}\sqrt{|x|}\,\mathrm{e}^{1/x}$.

   ◇ A droite de 0 on a donc $\lim\limits_{0+} f=\lim\limits_{+\infty}\sqrt{2}\dfrac{\mathrm{e}^X}{\sqrt{X}}=+\infty$.

   Ainsi la droite $x=0$ est asymptote verticale.

   ◇ A gauche de 0 on a $\lim\limits_{0-} f=0$.

   On peut donc prolonger f par continuité en 0 à gauche en posant $f(0)=0$.

   – On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de -2.

   Posons $x=-2+h$. Alors $f(x)=\exp(\frac{1}{-2+h})\sqrt{|h(-2+h)|}\sim\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\sqrt{|h|}$.

   On en déduit $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\,\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\begin{cases}+\infty & \text{si } h\to 0^+\\ -\infty & \text{si } h\to 0^-\end{cases}$

   L'application f n'est donc pas dérivable en -2. Plus précisément, la courbe $y=f(x)$ admet au point $(-2,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers les $y>0$.

   – On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de 0 (après le prolongement $f(0)=0$.)

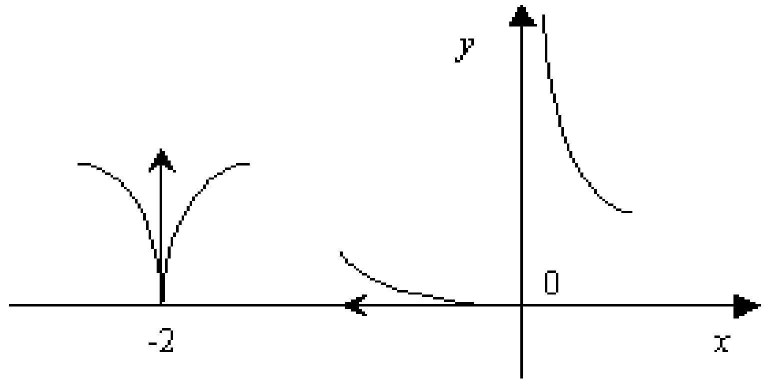
   On sait déja que $\lim\limits_{0+} f=+\infty$ (asymptote verticale $x=0$ à droite de 0.)

   Quand $x\to 0^-$, $f(x)\sim\sqrt{2}\,\sqrt{|x|}\,\mathrm{e}^{1/x}$ donc $\dfrac{f(x)}{x}\sim-\sqrt{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{1/x}$.

   On en déduit $\lim\limits_{0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{-\infty}-\sqrt{2}\,\sqrt{|X|}\,\mathrm{e}^X=0^-$.

   Il en découle que la courbe $y=f(x)$ présente à l'origine une demi-tangente horizontale (la courbe étant située au-dessus car $f\geq 0$ sur son domaine.)

En résumé, voici l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -2$:



[Q]

3. On remarque que pour tout x de $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ on a $f(x) > 0$ et $\ln f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x(x+2)|$.

   On dérive et on trouve : $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{-2,0\},\ \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\,\frac{2(x+1)}{x(x+2)} = \frac{-(x+2)+x(x+1)}{x^2(x+2)}$.

   On en déduit : $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{-2,0\},\ f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}f(x)$.

   L'application f' est donc du signe de $\frac{x^2-2}{x+2}$ donc du signe de $(x+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

   On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0 || 0	↗	$f(-\sqrt{2})$	↘	0 || $+\infty$	↘	$f(\sqrt{2})$	↗	$+\infty$

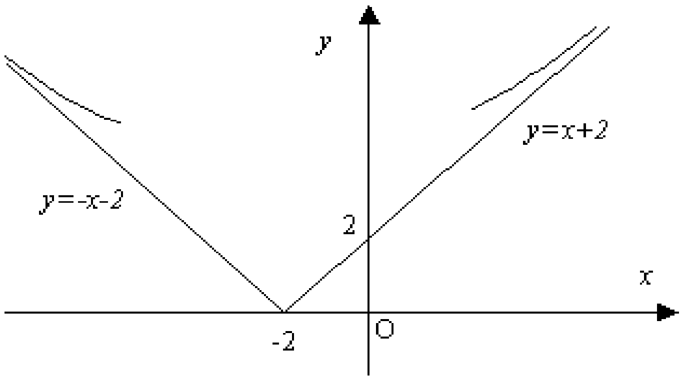
   On remarque les points $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}))$ et $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ en lesquels la courbe $y = f(x)$ présente une tangente horizontale. On a $f(\sqrt{2}) \approx 4,46$ et $f(-\sqrt{2}) \approx 0,45$. [Q]

4. On effectue un développement généralisé par rapport à l'infiniment petit $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{|x(x+2)|} = |x|\ \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{1+\frac{2}{x}} \qquad \left(\text{quand } x\to\infty,\ 1+\frac{2}{x}>0\right)\\
&= |x|\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= |x|\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

- On en déduit que quand $x \to +\infty$ alors $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.
  La courbe présente donc l'asymptote $y = x + 2$ (la courbe est localement au-dessus.)
- De même, quand $x \to -\infty$ alors $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.
  La courbe présente donc l'asymptote $y = -x - 2$ (la courbe est localement au-dessus.)

En résumé, voici l'allure de la courbe au voisinage de $\pm\infty$.



[Q]

5. On sait que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2(x+2)} f(x)$.

   On en déduit pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \Big(\frac{x^2-2}{x^2(x+2)}\Big)' f(x) + \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) \\ &= \frac{2x^3(x+2) - (x^2-2)(3x^2+4x) + (x^2-2)^2}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x) \end{aligned}$$

   L'application f étant > 0 sur $\mathbb{R} - \{0, -2\}$, $f''(x)$ a le signe de $x^2 + 4x + 2$.
   Mais $(x^2 + 4x + 2) = (x - \alpha)(x - \beta)$ avec $\alpha = -2 - \sqrt{2}$ et $\beta = -2 + \sqrt{2}$.
   On en déduit le signe de f'' et la concavité de f.

	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
f		convexe		concave	||	concave		convexe	||	convexe	

   Il y a deux points d'inflexion : $\begin{cases} I_1 = (\alpha, f(\alpha)) \approx (-3.41, 1.64) \\ I_2 = (\beta, f(\beta)) \approx (-0.59, 0.17) \end{cases}$ [Q]