

Quatre études de fonctions

Exercice 1

On définit la fonction $f : x \mapsto e^{1/x} \sqrt{|x(x+2)|}$.

1. Préciser le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f . [S]
2. Indiquer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = -2$ et au voisinage de $x = 0$. [S]
3. Étudier le sens de variations de f , et dresser son tableau de variations. [S]
4. Étudier l'existence d'une asymptote oblique quand $x \rightarrow -\infty$ ou quand $x \rightarrow +\infty$.
Donner le placement de la courbe par rapport à cette asymptote. [S]
5. Étudier la concavité de f et préciser les points d'inflexion. [S]
6. Tracer soigneusement la courbe représentative de f . [S]

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = |\tan x|^{\cos x}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f . Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?
Montrer qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $]0, \pi[$.
Pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire ? [S]
2. Montrer que l'application f peut être prolongée par continuité en $x = 0$ et en $x = \frac{\pi}{2}$. [S]
3. Étudier le sens de variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et dresser son tableau de variations.
On donnera une valeur approchée de l'abscisse x_0 pour laquelle $f'(x_0) = 0$.
Procéder à une étude analogue sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ [S]
4. Préciser l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = \frac{\pi}{2}$. [S]
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f sur un intervalle contenant $[0, \pi]$. [S]

Exercice 3

On considère l'application f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. Indiquer le domaine de définition de f . Que dire de la dérivabilité de f sur ce domaine ?
Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition. [S]
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. [S]
3. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$, de $x = 1$, et de $+\infty$. [S]
4. Tracer soigneusement la courbe représentative de f . [S]



Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x > -1$ (et $x \neq 0$) : $\exists ! \theta_x \in]0, 1[$ tel que $\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta_x x}$. [S]
2. On définit l'application f par $f(x) = \theta_x$.
Préciser la dérivabilité de f , et donner les limites de f aux bornes de son domaine. [S]
3. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. [S]
4. Indiquer l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -1$. [S]
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f . [S]

Corrigé du problème

Exercice 1

1. f est définie et continue sur \mathbb{R}^* , comme produit et composée d'applications continues.

Elle est dérivable (et même de classe \mathcal{C}^∞) sur $] -\infty, -2[\cup] -2, 0[\cup] 0, +\infty[$. [Q]

2. – Au voisinage de $\pm\infty$, on a $f(x) \sim |x|$ donc $\lim_{\infty} f = +\infty$.

– L'application f est continue en -2 , avec $f(-2) = 0$.

– Au voisinage de 0, on a $f(x) \sim \sqrt{2}\sqrt{|x|}e^{1/x}$.

◇ A droite de 0 on a donc $\lim_{0^+} f = \lim_{+\infty} \sqrt{2} \frac{e^X}{\sqrt{X}} = +\infty$.

Ainsi la droite $x = 0$ est asymptote verticale.

◇ A gauche de 0 on a $\lim_{0^-} f = 0$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 à gauche en posant $f(0) = 0$.

– On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de -2 .

Posons $x = -2 + h$. Alors $f(x) = \exp\left(\frac{1}{-2+h}\right) \sqrt{|h(-2+h)|} \sim \sqrt{\frac{2}{e}} \sqrt{|h|}$.

On en déduit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{e}} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \begin{cases} +\infty & \text{si } h \rightarrow 0^+ \\ -\infty & \text{si } h \rightarrow 0^- \end{cases}$

L'application f n'est donc pas dérivable en -2 . Plus précisément, la courbe $y = f(x)$ admet au point $(-2, 0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers les $y > 0$.

– On va préciser l'allure de la courbe au voisinage de 0 (après le prolongement $f(0) = 0$.)

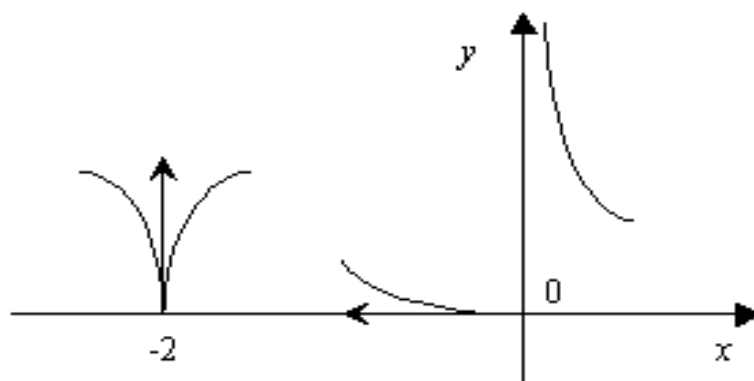
On sait déjà que $\lim_{0^+} f = +\infty$ (asymptote verticale $x = 0$ à droite de 0.)

Quand $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \sim \sqrt{2} \sqrt{|x|} e^{1/x}$ donc $\frac{f(x)}{x} \sim -\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{1/x}$.

On en déduit $\lim_{0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} -\sqrt{2} \sqrt{|X|} e^X = 0^-$.

Il en découle que la courbe $y = f(x)$ présente à l'origine une demi-tangente horizontale (la courbe étant située au-dessus car $f \geq 0$ sur son domaine.)

En résumé, voici l'allure de la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $x = 0$ et de $x = -2$:



[Q]

3. On remarque que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$ on a $f(x) > 0$ et $\ln f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln |x(x+2)|$.

On dérive et on trouve : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{2(x+1)}{x(x+2)} = \frac{-(x+2)+x(x+1)}{x^2(x+2)}$.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 0\}$, $f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f(x)$.

L'application f' est donc du signe de $\frac{x^2-2}{x+2}$ donc du signe de $(x+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

On en déduit le tableau de variations de f :

| | $-\infty$ | -2 | $-\sqrt{2}$ | 0 | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|----------------|-----|---------------|-----------|
| $f'(x)$ | - | | + 0 - | | - 0 + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | 0 | $f(-\sqrt{2})$ | 0 | $f(\sqrt{2})$ | $+\infty$ |

On remarque les points $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}))$ et $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ en lesquels la courbe $y = f(x)$ présente une tangente horizontale. On a $f(\sqrt{2}) \approx 4,46$ et $f(-\sqrt{2}) \approx 0,45$. [Q]

4. On effectue un développement généralisé par rapport à l'infiniment petit $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{1/x} \sqrt{|x(x+2)|} = |x| e^{1/x} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \quad (\text{quand } x \rightarrow \infty, 1 + \frac{2}{x} > 0) \\
 &= |x| \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
 &= |x| \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

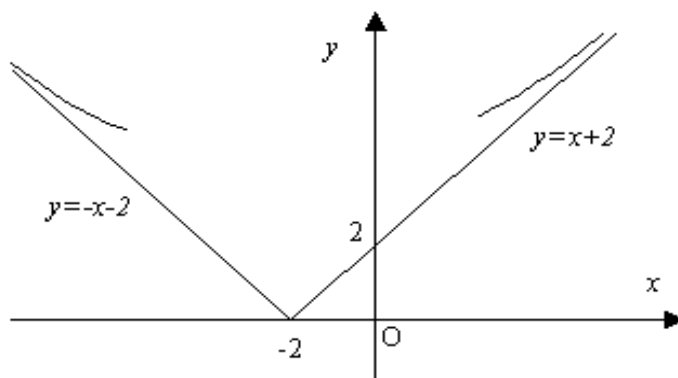
◇ On en déduit que quand $x \rightarrow +\infty$ alors $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

La courbe présente donc l'asymptote $y = x + 2$ (la courbe est localement au-dessus.)

◇ De même, quand $x \rightarrow -\infty$ alors $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

La courbe présente donc l'asymptote $y = -x - 2$ (la courbe est localement au-dessus.)

En résumé, voici l'allure de la courbe au voisinage de $\pm\infty$.



[Q]

5. On sait que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2(x + 2)} f(x)$.

On en déduit pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 2}{x^2(x + 2)} \right)' f(x) + \frac{x^2 - 2}{x^2(x + 2)} f'(x) \\ &= \frac{2x^3(x + 2) - (x^2 - 2)(3x^2 + 4x) + (x^2 - 2)^2}{x^4(x + 2)^2} f(x) \\ &= \frac{2(x^2 + 4x + 2)}{x^4(x + 2)^2} f(x) \end{aligned}$$

L'application f étant > 0 sur $\mathbb{R} - \{0, -2\}$, $f''(x)$ a le signe de $x^2 + 4x + 2$.

Mais $(x^2 + 4x + 2) = (x - \alpha)(x - \beta)$ avec $\alpha = -2 - \sqrt{2}$ et $\beta = -2 + \sqrt{2}$.

On en déduit le signe de f'' et la concavité de f .

| | | | | | | |
|-------|-----------|-----------------|---------|-----------------|---------|-----------|
| | $-\infty$ | $-2 - \sqrt{2}$ | -2 | $-2 + \sqrt{2}$ | 0 | $+\infty$ |
| f'' | + | 0 | - | - | 0 | + |
| f | convexe | concave | concave | convexe | convexe | convexe |

Il y a deux points d'inflexion : $\begin{cases} I_1 = (\alpha, f(\alpha)) \approx (-3.41, 1.64) \\ I_2 = (\beta, f(\beta)) \approx (-0.59, 0.17) \end{cases}$ [Q]