Dérivées successives de $\exp(-\dfrac{1}{x})$

Le problème est constitué de deux parties indépendantes.

On définit une fonction f par : $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Etudier les variations de f et construire son graphe Γ dans un repère orthonormé.
   On précisera le point d'inflexion I et la demi-tangente au point d'arrêt. [S]
2. (a) Déterminer le point A de Γ, distinct de O, en lequel la tangente à Γ passe par O. [S]
   (b) Montrer qu'il existe deux points de Γ, distincts de A, et deux seulement, en lesquels la tangente à Γ est parallèle à OA. On notera α et β ($\alpha < \beta$) les abscisses de ces points (qu'on ne demande pas de calculer). [S]
3. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{1 - 2\ln|x|}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
   (a) Etudier les variations et tracer le graphe $\mathcal{C}$ de g dans un repère orthonormé (unité 2cm). On précisera la concavité de $\mathcal{C}$. [S]
   (b) Montrer que $g(x) = x \Leftrightarrow x \in \{\alpha, \beta, 0, 1\}$. [S]
   (c) Etudier $g(x) - x$ sur $[0, 1]$.
   En déduire : $\forall x \in]0, \beta[,\ x < g(x) < \beta$, et $\forall x \in]\beta, 1[,\ \beta < g(x) < x$. [S]
   (d) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$.
   Montrer qu'elle converge vers β. [S]
   (e) Calculer β à 10^{-2} près, avec successivement $u_0 = 0,2$ et $u_0 = 0,4$ (on fera figurer les résultats intermédiaires). [S]
   (f) Montrer que $-2,10 < \alpha < -2,09$. [S]

DEUXIÈME PARTIE

1. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f^{(n)}(x) = P_n(x) x^{-2n} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$,
   la suite (P_n) vérifiant la relation de récurrence :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx - 1)P_n(x)$. [S]
2. Expliciter P_1 et P_2. [S]
3. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n, ainsi que son terme constant. [S]
4. Dans cette question on trouve une relation de récurrence entre les P_n.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 f'(x) = f(x)$. [S]
   (b) En appliquant la formule de Leibniz à cette relation, prouver que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n-1)x^2 P_{n-1}(x) = 0$. [S]

5. Déduire de ce qui précède que :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -n(n-1)P_{n-1}(x)$. [S]
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ n(n-1)P_n(x) + (1-(2n-2)x)P_n'(x) + x^2P_n''(x) = 0$. [S]

6. Soit n un entier donné, supérieur ou égal à 1. On pose $P_n(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m$.
   (a) Montrer que $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\},\ a_k = \dfrac{1}{k!}P_n^{(k)}(0)$. [S]
   (b) Etablir que $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\},\ P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!}\,\dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}P_{n-k}(x)$. [S]
   (c) En déduire la valeur des coefficients a_k. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. – Degré de dérivabilité de f

   f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (car composée d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$: l'application $x \to \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ et l'application $x \to \exp(-x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.)

   – Limites aux bornes

   On a $\lim\limits_{0+} f = 0$ car $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{e}^X = 0$: f est donc continue à droite à l'origine.

   On a $\lim\limits_{0-} f = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$: la droite $x = 0$ est asymptote verticale.

   $\lim\limits_{+\infty} f = 1^-$ et $\lim\limits_{-\infty} f = 1^+$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale (la courbe est au-dessus au voisinage de $-\infty$, et en dessous au voisinage de $+\infty$.)

   – Sens de variation

   Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

   f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^+$ (la continuité en 0 à droite permet d'ajouter l'origine à l'intervalle $]0, +\infty[$.)

   – Dérivabilité à droite en 0

   On a $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} X \exp(-X) = 0^+$.
   Cela prouve que f est dérivable en 0 à droite, avec $f'(0) = 0$.
   La courbe représentative de f présente donc à l'origine une demi-tangente horizontale (et la courbe est au-dessus car, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, $f(x) > 0$.)

   – Concavité et point d'inflexion

   Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f''(x) = f(x)\left(-\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right) = \dfrac{1 - 2x}{x^4} f(x)$.

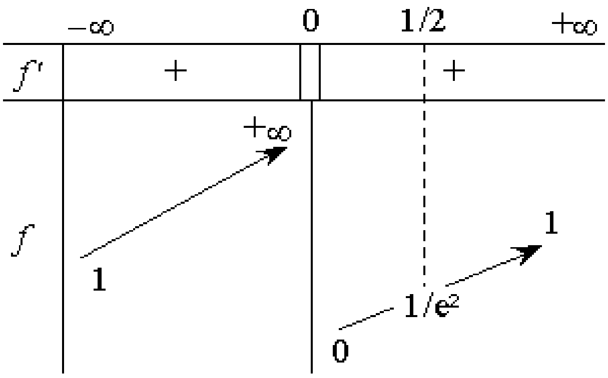
   f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 1/2$.

   Le point $I = (2, f(1/2) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \approx 0.135)$ est donc un point d'inflexion de Γ.

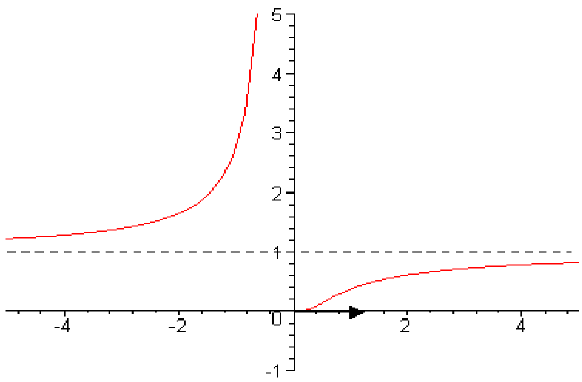
   Si $x < 0$ ou si $0 < x < 1/2$, $f''(x) > 0$: f est donc convexe sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $[0, 1/2]$ (les points 0 et $1/2$ sont ajoutés par continuité.)
   Si $x > 1/2$, $f''(x) < 0$: f est donc concave sur $[1/2, +\infty[$.

   La tangente au point d'inflexion a pour coefficient directeur $f'(1/2) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} \approx 0.54$.

– Tableau de variations



– Courbe représentative



[Q]

2. (a) L'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 \neq 0$ de Γ est :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ c'est-à-dire $y = \exp\left(-\dfrac{1}{x_0}\right)\left[\dfrac{1}{x_0^2}(x - x_0) + 1\right]$.
Cette tangente passe par l'origine si cette équation est vérifiée pour $x = y = 0$.
Le point x_0 doit donc vérifier $-\dfrac{1}{x_0} + 1 = 0$ c'est-à-dire $x_0 = 1$.
$A(1, \dfrac{1}{\mathrm{e}})$ est donc le seul point de Γ distinct de O, où la tangente passe par O. [Q]

(b) Le coefficient directeur de la droite OA est $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
La tangente en un point $(x, f(x))$ de Γ est parallèle à $OA \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Mais $f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
On va étudier la fonction f', dont la dérivée sur $\mathbb{R}^*$ est $f''(x) = \dfrac{1 - 2x}{x^4}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.