

Dérivées successives de $\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$

Le problème est constitué de deux parties indépendantes.

On définit une fonction f par : $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Etudier les variations de f et construire son graphe Γ dans un repère orthonormé.
On précisera le point d'inflexion I et la demi-tangente au point d'arrêt. [S]
2. (a) Déterminer le point A de Γ , distinct de O , en lequel la tangente à Γ passe par O . [S]
(b) Montrer qu'il existe deux points de Γ , distincts de A , et deux seulement, en lesquels la tangente à Γ est parallèle à OA . On notera α et β ($\alpha < \beta$) les abscisses de ces points (qu'on ne demande pas de calculer). [S]
3. On définit une fonction g sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{1 - 2 \ln |x|}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
 - (a) Etudier les variations et tracer le graphe \mathcal{C} de g dans un repère orthonormé (unité 2cm). On précisera la concavité de \mathcal{C} . [S]
 - (b) Montrer que $g(x) = x \Leftrightarrow x \in \{\alpha, \beta, 0, 1\}$. [S]
 - (c) Etudier $g(x) - x$ sur $[0, 1]$.
En déduire : $\forall x \in]0, \beta[, x < g(x) < \beta$, et $\forall x \in]\beta, 1[, \beta < g(x) < x$. [S]
 - (d) On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.
Montrer qu'elle converge vers β . [S]
 - (e) Calculer β à 10^{-2} près, avec successivement $u_0 = 0,2$ et $u_0 = 0,4$ (on fera figurer les résultats intermédiaires). [S]
 - (f) Montrer que $-2,10 < \alpha < -2,09$. [S]

DEUXIÈME PARTIE

1. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-2n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right),$$
 la suite (P_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) - (2nx - 1)P_n(x). \quad [S]$$
2. Expliciter P_1 et P_2 . [S]
3. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n , ainsi que son terme constant. [S]
4. Dans cette question on trouve une relation de récurrence entre les P_n .
 - (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 f'(x) = f(x)$. [S]
 - (b) En appliquant la formule de Leibniz à cette relation, prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) + (2nx - 1)P_n(x) + n(n - 1)x^2 P_{n-1}(x) = 0. \quad [S]$$



5. Dédurre de ce qui précède que :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P'_n(x) = -n(n-1)P_{n-1}(x)$. [S]

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, n(n-1)P_n(x) + (1 - (2n-2)x)P'_n(x) + x^2P''_n(x) = 0$. [S]

6. Soit n un entier donné, supérieur ou égal à 1. On pose $P_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m$.

(a) Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, a_k = \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(0)$. [S]

(b) Etablir que $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} P_{n-k}(x)$. [S]

(c) En déduire la valeur des coefficients a_k . [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. – Degré de dérivabilité de f

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* (car composée d'applications de classe \mathcal{C}^∞ : l'application $x \rightarrow \frac{1}{x}$ de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} et l'application $x \rightarrow \exp(-x)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .)

– Limites aux bornes

On a $\lim_{0^+} f = 0$ car $\lim_{-\infty} e^X = 0$: f est donc continue à droite à l'origine.

On a $\lim_{0^-} f = +\infty$ car $\lim_{+\infty} e^X = +\infty$: la droite $x = 0$ est asymptote verticale.

$\lim_{+\infty} f = 1^-$ et $\lim_{-\infty} f = 1^+$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale (la courbe est au-dessus au voisinage de $-\infty$, et en dessous au voisinage de $+\infty$.)

– Sens de variation

Pour tout x de \mathbb{R}^* , $f'(x) = \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$.

f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}^{-*} et sur \mathbb{R}^+ (la continuité en 0 à droite permet d'ajouter l'origine à l'intervalle $]0, +\infty[$.)

– Dérivabilité à droite en 0

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X \exp(-X) = 0^+$.

Cela prouve que f est dérivable en 0 à droite, avec $f'(0) = 0$.

La courbe représentative de f présente donc à l'origine une demi-tangente horizontale (et la courbe est au-dessus car, pour tout x de \mathbb{R}^{+*} , $f(x) > 0$.)

– Concavité et point d'inflexion

Pour tout x de \mathbb{R}^* , $f''(x) = f(x) \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = \frac{1 - 2x}{x^4} f(x)$.

f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 1/2$.

Le point $I = (2, f(1/2) = \frac{1}{e^2} \approx 0.135)$ est donc un point d'inflexion de Γ .

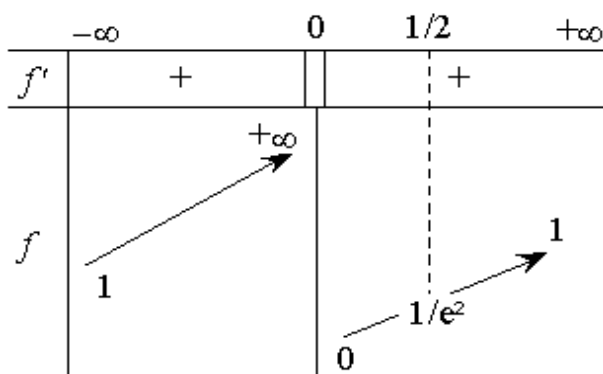
Si $x < 0$ ou si $0 < x < 1/2$, $f''(x) > 0$: f est donc convexe sur \mathbb{R}^{-*} et sur $[0, 1/2]$ (les points 0 et $1/2$ sont ajoutés par continuité.)

Si $x > 1/2$, $f''(x) < 0$: f est donc concave sur $[1/2, +\infty[$.

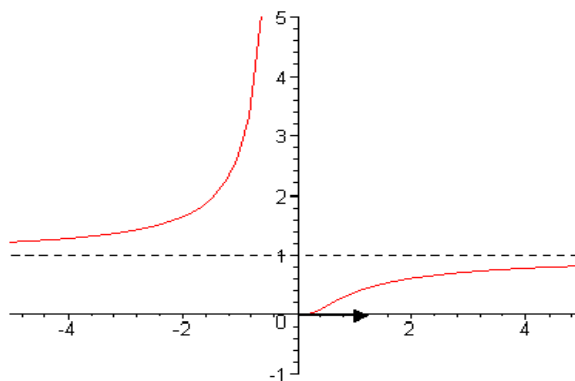
La tangente au point d'inflexion a pour coefficient directeur $f'(1/2) = \frac{4}{e^2} \approx 0.54$.

– Tableau de variations

	$-\infty$	0	$1/2$	$+\infty$
f'	+			+
f	1	$+\infty$	$1/e^2$	1



– Courbe représentative



[Q]

2. (a) L'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 \neq 0$ de Γ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ c'est-à-dire } y = \exp\left(-\frac{1}{x_0}\right) \left[\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) + 1 \right].$$

Cette tangente passe par l'origine si cette équation est vérifiée pour $x = y = 0$.

Le point x_0 doit donc vérifier $-\frac{1}{x_0} + 1 = 0$ c'est-à-dire $x_0 = 1$.

$A(1, \frac{1}{e})$ est donc le seul point de Γ distinct de O , où la tangente passe par O . [Q]

(b) Le coefficient directeur de la droite OA est $\frac{1}{e}$.

La tangente en un point $(x, f(x))$ de Γ est parallèle à $OA \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e}$.

$$\text{Mais } f'(x) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{e}.$$

On va étudier la fonction f' , dont la dérivée sur \mathbb{R}^* est $f''(x) = \frac{1 - 2x}{x^4} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$.