Approximation d'une solution de $f''(t) = a(t)f(t) + b(t)$

On désigne par $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

On suppose que l'application $t \mapsto a(t)$ est à valeurs positives ou nulles.

Soient λ, μ deux réels. On considère le problème suivant :

Trouver $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ f''(t) = a(t)f(t) + b(t) \\ f(0) = \lambda,\ f(1) = \mu \end{cases}$

Il s'agit donc d'une équation différentielle avec "conditions aux limites".

On suppose que ce problème admet une solution, désignée par f dans toute la suite.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$.

On note $M_2(f) = \sup\limits_{[0,1]} |f''|$ et $M_4(f) = \sup\limits_{[0,1]} \left|f^{(4)}\right|$.

L'objectif est ici d'étudier une méthode d'approximation de f sur $[0,1]$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Première Partie

1. Soit $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\alpha < \beta$.
   On suppose que $g(\alpha) = 0$ et que $g(\beta) = 0$. On pose $M_2(g) = \sup\limits_{[\alpha,\beta]} |g''|$.
   (a) Montrer que : $\forall t \in [\alpha, \beta],\ |g(t)| \le \dfrac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2} M_2(g)$. [S]
   (b) En déduire que : $\sup\limits_{[\alpha,\beta]} |g| \le \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{8} M_2(g)$. [S]
2. On garde les notations précédentes, mais on ne suppose plus $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.
   Prouver l'inégalité : $\sup\limits_{[\alpha,\beta]} |g| \le \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{8} M_2(g) + \max(|g(\alpha)|, |g(\beta)|)$ [S]
3. On se donne n dans $\mathbb{N}$. On pose $h = \dfrac{1}{n+1}$, et $\forall k \in \{0, \ldots, n+1\},\ t_k = kh$.
   Pour tout k de $\{0, \ldots, n+1\}$, soit u_k une valeur approchée de $f(t_k)$.
   On note $\delta_n = \max\{|u_k - f(t_k)|, 0 \le k \le n+1\}$.
   δ_n représente donc l'erreur maximum commise dans les approximations $f(t_k) \approx u_k$.
   On définit une application φ_n sur $[0,1]$ de la manière suivante :
   ◇ Pour tout k de $\{0, \ldots, n+1\}$, $\varphi_n(t_k) = u_k$.
   ◇ Pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, φ_n est affine sur $[t_k, t_{k+1}]$.
   Montrer que $\sup\limits_{[0,1]} |f - \varphi_n| \le \dfrac{M_2(f)}{8(n+1)^2} + \delta_n$. [S]

Deuxième Partie

On se donne un entier $n \geq 2$, et des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

On suppose que pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$ on a $\alpha_k \geq 2$.

On considère le système (S) de n équations $(E_1), \ldots, (E_n)$ aux n inconnues $u_1, \ldots, u_n$:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} \alpha_1 u_1 & -u_2 & & & & = \beta_1 & (E_1) \\ -u_1 & +\alpha_2 u_2 & -u_3 & & & = \beta_2 & (E_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & -u_{n-2} & +\alpha_{n-1} u_{n-1} & -u_n & = \beta_{n-1} & (E_{n-1}) \\ & & & -u_{n-1} & +\alpha_n u_n & = \beta_n & (E_n) \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'on définit n réels $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de $]\,0, 1]$ en posant :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ \gamma_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1} - \gamma_k}$$

[S]

2. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les n réels définis par les égalités :

$$v_1 = \beta_1\, \gamma_1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ v_{k+1} = (\beta_{k+1} + v_k)\gamma_{k+1}$$

Montrer que (S) a une solution unique $(u_1, \ldots, u_n)$, et qu'elle est donnée par les relations :

$$(\Sigma) : \quad u_n = v_n \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n-1\},\ u_k = v_k + \gamma_k\, u_{k+1}$$

[S]

3. Montrer qu'on a la majoration $\displaystyle\sup_{1 \leq k \leq n} |u_k| \leq \frac{(n+1)^2}{2} \sup_{1 \leq k \leq n} |\beta_k|$ [S]

Troisième Partie

1. Soit t un élément de $]0, 1[$. Soit h dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $[t-h, t+h] \subset [0, 1]$.

Montrer que $|f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) - h^2 f''(t)| \leq \dfrac{h^4}{12} M_4(f)$. [S]

2. On reprend maintenant les notations de la question I-3. On rappelle que $h = \dfrac{1}{n+1}$.

Déduire de ce qui précède que pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$ il existe un réel ε_k tel que :

$-f(t_{k-1}) + (2 + h^2 a(t_k))f(t_k) - f(t_{k+1}) = -h^2 b(t_k) + \varepsilon_k$, avec $|\varepsilon_k| \leq \dfrac{h^4}{12} M_4(f)$. [S]

3. On connait déjà les valeurs $f(t_0) = f(0) = \lambda$ et $f(t_{n+1}) = f(1) = \mu$.

On veut maintenant des valeurs approchées u_1 de $f(t_1)$, u_2 de $f(t_2)$, ..., u_n de $f(t_n)$.

Pour cela, on résout le système suivant, "proche" de celui vérifié par les $f(t_k)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \lambda, \quad u_{n+1} = \mu \\ \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, -u_{k-1} + (2 + h^2 a(t_k))u_k - u_{k+1} = -h^2 b(t_k) \end{array} \right.$$

(a) Indiquer comment calculer successivement $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1$. [S]

(b) Préciser le système vérifié par les réels $w_1 = f(t_1) - u_1, \ldots, w_n = f(t_n) - u_n$.

En déduire que $\sup\limits_{1\le k\le n} |f(t_k) - u_k| \le \dfrac{M_4(f)}{24(n+1)^2}$. [S]

4. φ_n ayant le sens vu en I-3, trouver K tel que : $\sup\limits_{[0,1]} |f - \varphi_n| \le \dfrac{K}{(n+1)^2}$. Conclusion ? [S]