Équations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

1. Soit A une partie de E.

   On cherche à caractériser les solutions (X, Y) de l'équation $X \cap Y = A$.

   (a) Soit A une partie de E. Montrer que pour tout couple (R, S) de parties de E, les ensembles $\begin{cases} X = A \cup (R \cap \bar{S}) \\ Y = A \cup (\bar{R} \cap S) \end{cases}$ vérifient $X \cap Y = A$. [I] [S]

   (b) Montrer que, réciproquement, toute solution (X, Y) de $X \cap Y = A$ est de la forme ci-dessus pour, au moins, un couple (R, S) de parties de E. [I] [S]

   (c) Conclure. [I] [S]

2. Etudier de même l'équation $X \cup Y = A$.

   On donnera deux démonstrations pour cette question :

   (a) Une méthode analogue à la précédente, avec $\begin{cases} X = A \cap (R \cup \bar{S}) \\ Y = A \cap (\bar{R} \cup S) \end{cases}$ [I] [S]

   (b) Une méthode qui utilise le *résultat* de la question précédente. [I] [S]

3. Dans cette question, on désire étudier l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$, où A, B, C sont des parties données de E, X étant une partie inconnue de E.

   (a) On suppose que X_0 est solution de cette équation.

      i. Montrer que $A \cap B \subset C$ et $C \subset A \cup B$. [I] [S]

      ii. Montrer que $(\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup \left[X_0 \cap \left((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\right)\right] = X_0$. [I] [S]

   (b) On suppose que $A \cap B \subset C \subset A \cup B$.

   D étant une partie de E, on pose : $X = (\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup \left[D \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))\right]$.

   Démontrer que :

      i. $A \cap X = C \cap \left[\bar{B} \cup (D \cap A \cap B)\right]$. [I] [S]

      ii. $\bar{B} \cup X = \bar{B} \cup (B \cap \bar{C}) \cup (D \cap A \cap B)$. [I] [S]

      iii. $B \cap \bar{X} = C \cap \left[\bar{A} \cup (\bar{D} \cap B)\right]$. [I] [S]

   (c) En déduire $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X})$. [I] [S]

   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur A,B,C, pour que l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$ ait au moins une solution. [I] [S]

   (e) Donner alors la forme générale de la solution. [I] [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

1. (a) Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$, puis associativité et commutativité de $\cap$. [Q]
   (b) Choisir par exemple $R = X$ et $S = Y$. [Q]
   (c) (X, Y) est solution de $X \cap Y = A \Leftrightarrow$ il existe R, S dans $\mathcal{P}(E)$ tel que... [Q]
2. (a) Utiliser encore les propriétés de $\cup, \cap$ et toujours $R = X, S = Y$ pour la réciproque. [Q]
   (b) Utiliser le passage au complémentaire, qui permet de transformer un problème de réunion en un problème d'intersection. [Q]
3. (a) i. Montrer d'abord que $(A \cap B) \cap C = A \cap B$.
      Utiliser ensuite $A \cap X_0 \subset A$ et $B \cap \bar{X}_0 \subset B$. [Q]
      ii. Montrer tout d'abord $\bar{B} \cap C = \bar{B} \cap A \cap X_0$.
      Vérifier également $B \cap \bar{C} = B \cap \bar{A} \cap X_0$. [Q]
   (b) i. Dans le développpement des deux membres de l'égalité à démontrer, on pourra remarquer que $C \cap A \cap B = A \cap B$ et $A \cap D \cap \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.
      De même on pourra utiliser $A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset$ et $C \cap \bar{B} \cap A = C \cap \bar{B}$. [Q]
      ii. $\bar{B}$ contient $\bar{B} \cap C$ et $D \cap \bar{A} \cap \bar{B}$. [Q]
      iii. B est inclus dans $B \cup \bar{C}$ et dans $\bar{D} \cup A \cup B$.
      On sera aussi amené à justifier et à utiliser $C \cap \bar{A} \cap B = C \cap \bar{A}$. [Q]
   (c) Factoriser $C \cap \cdots$, et utiliser les questions (i) et (iii). [Q]
   (d) La condition est $A \cap B \subset C \subset A \cap B$. [Q]
   (e) Simple regroupement des résultats des questions 3-a et 3-c. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.