Théorème de Dirichlet

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On note a_k et b_k les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note S_n le polynôme de Fourier de f d'indice n.

On rappelle que S_n est défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$, avec $f(x^-) = \displaystyle\lim_{t\to x,\, t<x} f(t)$ et $f(x+) = \displaystyle\lim_{t\to x,\, t>x} f(t)$.

L'application $\tilde{f}$ (la “régularisée” de f) coïncide donc avec f en tout point où f est continue.

Dans cette question, x est un réel donné.

1. Soit g une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ (avec $a<b$).

   Pour tout réel strictement positif t, on pose $I_t(g) = \displaystyle\int_a^b g(u)\sin tu \,\mathrm{d}u$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I_t(g) = 0$.

   Indication : on commencera par supposer que g est en escaliers sur $[a,b]$. [S]
2. On pose, pour tout u de $]0,\pi]$, $g(u) = \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}(f(x+u)+f(x-u)-2\tilde{f}(x))$.

   Montrer que g se prolonge en une application continue par morceaux sur $[0,\pi]$. [S]
3. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a l'égalité : $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos ku = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$. [S]
4. En déduire la valeur de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u$. [S]
5. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{2\sin\frac{x-u}{2}} f(u)\,\mathrm{d}u$ [S]
6. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} f(u+x)\mathrm{d}u$. [S]
7. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} (f(u+x)+f(x-u))\mathrm{d}u$. [S]
8. En déduire que $S_n(x) - \tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^\pi g(u)\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,\mathrm{d}u$ [S]
9. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \tilde{f}(x)$. Conclusion ? [S]