

Phénomène de Gibbs

On définit une application f , 2π -périodique et impaire par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \pi[, f(x) = 1 \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que le développement en série de Fourier de f est : $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. [S]

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

On sait donc que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est simplement convergente vers f sur \mathbb{R} .

(a) La convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est-elle uniforme sur \mathbb{R} ? [S]

(b) Montrer que si $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$. [S]

(c) On se donne un réel a de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Préciser un majorant de $|T_n(x)|$ sur $[a, \pi - a]$. [S]

(d) Montrer que pour n dans \mathbb{N}^* et x dans $[a, \pi - a]$, on a : $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{4}{n\pi \sin a}$.

Indication : considérer $f_{n+p}(x) - f_n(x)$ (où $p \geq 2$), remarquer que $\sin(2k+1)x = T_{k+1}(x) - T_k(x)$, majorer en valeur absolue et faire tendre p vers $+\infty$. [S]

(e) En déduire que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $]0, \pi[$. [S]

3. Dans cette question, on étudie les variations de f_n .

(a) Montrer que pour l'étude de f_n , on peut se ramener à l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. [S]

(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f'_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x}$. [S]

(c) Montrer que f_n présente un premier maximum sur I en $x_n = \frac{\pi}{2n}$. [S]

(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$.

Indication : utiliser une somme de Riemann pour l'application $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$. [S]

Corrigé du problème

1. L'application f est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

En chaque discontinuité x_0 , on a $f(x_0) = \frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f)$: f est sa propre "régularisée".

D'après le théorème de Dirichlet, f est la somme sur \mathbb{R} de sa série de Fourier.

L'application f étant impaire, sa série de Fourier est une série de "sinus".

On a donc, pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin nx$, où $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin nt \, dt$.

$$\forall n \geq 1, b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nt \right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

$$\text{Autrement dit : } \forall n \geq 1, b_{2n}(f) = 0 \text{ et } \forall n \geq 0, b_{2n+1}(f) = \frac{4}{(2n+1)\pi}.$$

$$\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \quad [\text{Q}]$$

2. (a) La réponse à cette question est négative, car les applications f_n sont continues sur \mathbb{R} alors que f présente des discontinuités. [Q]

(b) On constate effectivement que, pour tout n de \mathbb{N}^* et tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} T_n(x) \sin x &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin x \sin(2k+1)x = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\cos 2kx - \cos(2k+2)x) \\ &= \frac{1 - \cos 2nx}{2} = \sin^2 nx \end{aligned}$$

Si x appartient à $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, le résultat s'en déduit par division par $\sin x$. [Q]

(c) Pour tout x de $[a, \pi - a]$, on a $|T_n(x)| = \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \leq \frac{1}{\sin a}$. [Q]

(d) Pour tous entiers n et p , et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}(f_{n+p}(x) - f_n(x)) &= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2k+1} (T_{k+1}(x) - T_k(x)) \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_{k+1}(x)}{2k+1} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_k(x)}{2k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_k(x)}{2k-1} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_k(x)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} T_k(x) \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) + \frac{T_{n+p}(x)}{2(n+p)-1} - \frac{T_n(x)}{2n+1} \end{aligned}$$