Phénomène de Gibbs

On définit une application f, 2π-périodique et impaire par : $\begin{cases} \forall x \in]0,\pi[, f(x) = 1 \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que le développement en série de Fourier de f est : $f(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. [S]

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

   On sait donc que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est simplement convergente vers f sur $\mathbb{R}$.

   (a) La convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? [S]

   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$. [S]

   (c) On se donne un réel a de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Préciser un majorant de $|T_n(x)|$ sur $[a, \pi - a]$. [S]

   (d) Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[a, \pi - a]$, on a : $|f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{4}{n\pi \sin a}$.

   Indication : considérer $f_{n+p}(x) - f_n(x)$ (où $p \geq 2$), remarquer que $\sin(2k+1)x = T_{k+1}(x) - T_k(x)$, majorer en valeur absolue et faire tendre p vers $+\infty$. [S]

   (e) En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $]0,\pi[$. [S]

3. Dans cette question, on étudie les variations de f_n.

   (a) Montrer que pour l'étude de f_n, on peut se ramener à l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$. [S]

   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n'(x) = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$. [S]

   (c) Montrer que f_n présente un premier maximum sur I en $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$. [S]

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \dfrac{\sin t}{t}\, dt$.

   Indication : utiliser une somme de Riemann pour l'application $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. [S]

Corrigé du problème

1. L'application f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

   En chaque discontinuité x_0, on a $f(x_0) = \dfrac{1}{2}(\lim\limits_{x_0^-} f + \lim\limits_{x_0^+} f)$: f est sa propre "régularisée".

   D'après le théorème de Dirichlet, f est la somme sur $\mathbb{R}$ de sa série de Fourier.

   L'application f étant impaire, sa série de Fourier est une série de "sinus".

   On a donc, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin nx$, où $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$.

   $\forall n \geq 1, b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin nt\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\Big[-\dfrac{1}{n}\cos nt\Big]_0^\pi = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$.

   Autrement dit : $\forall n \geq 1, b_{2n}(f) = 0$ et $\forall n \geq 0, b_{2n+1}(f) = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$.

   On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. [Q]

2. (a) La réponse à cette question est négative, car les applications f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ alors que f présente des discontinuités. [Q]

   (b) On constate effectivement que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} T_n(x)\sin x &= \sum_{k=0}^{n-1}\sin x\sin(2k+1)x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\cos 2kx - \cos(2k+2)x)) \\ &= \frac{1-\cos 2nx}{2} = \sin^2 nx \end{aligned}$$

   Si x appartient à $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, le résultat s'en déduit par division par $\sin x$. [Q]

   (c) Pour tout x de $[a, \pi - a]$, on a $|T_n(x)| = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x} \leq \dfrac{1}{\sin a}$. [Q]

   (d) Pour tous entiers n et p, et pour tout réel x :

   $$\begin{aligned} \frac{\pi}{4}(f_{n+p}(x) - f_n(x)) &= \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{2k+1}(T_{k+1}(x) - T_k(x)) \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_{k+1}(x)}{2k+1} - \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_k(x)}{2k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_k(x)}{2k-1} - \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{T_k(x)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1}T_k(x)\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) + \frac{T_{n+p}(x)}{2(n+p)-1} - \frac{T_n(x)}{2n+1} \end{aligned}$$