Produit scalaire sur des matrices 2×2

D'après Maths II, filière PC, Centrale-Supélec 1998

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,(A)$ désigne la trace de A.
On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.

Le problème porte sur des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
L'ensemble de ces matrices sera noté $\mathcal{M}$.

On notera E la matrice unité : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On désignera par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}$, constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire de la forme aE, avec a réel.

On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}$ dont la trace est nulle.

On note $s(A)$ la "matrice complémentaire" de la matrice A, qui est par définition la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est identifié à l'espace des matrices colonnes $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et il est muni de sa structure euclidienne canonique pour laquelle le produit scalaire des vecteurs X et Y est donné par ${}^{\mathrm{T}}XY$. La norme associée est notée $X \mapsto \|X\|$.

Dans $\mathcal{M}$, on note A l'ensemble des matrices antisymétriques, $\mathcal{S}$ celui des matrices symétriques, et $\mathcal{U}$ celui des matrices orthogonales.

On désigne enfin par $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{S}$ qui vérifient ${}^{\mathrm{T}}XAX \geq 0$ quel que soit X dans $\mathbb{R}^2$.

Les parties (A) et (B) sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

1. (a) Montrer que s est un endomorphisme de $\mathcal{M}$ et donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. [S]

   (b) Montrer que les matrices suivantes constituent une base de $\mathcal{M}$;

$$E = B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   [S]

(c) Donner la matrice de s dans cette base. [S]
(d) Déterminer $s \circ s$. [S]

2. (a) Montrer que $s(MN) = s(N)s(M)$. [S]
(b) Comparer, lorsque cela est possible, $s(M^{-1})$ et $s(M)^{-1}$. [S]
(c) Pour A appartenant à $\mathcal{M}$, établir la relation $s(A) = -A + \text{tr}\,(A)E$. [S]
(d) Montrer que si A est semblable à B, alors $s(A)$ est semblable à $s(B)$. [S]

3. (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et préciser sa dimension. [S]
(b) Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}$. [S]

Partie B

Pour M et N dans $\mathcal{M}$, on pose $< M, N >= \text{tr}\,(M\,{}^{\text{T}}N)$.

1. (a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}$. Préciser la norme associée. [S]
(b) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre pour ce produit scalaire. [S]
(c) Montrer qu'il en est de même pour les sous-espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$. [S]
(d) Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}$ et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{R}^2$, on a les égalités $< A, X\,{}^{\text{T}}Y >= {}^{\text{T}}XAY = {}^{\text{T}}Y\,{}^{\text{T}}AX$. [S]

2. Soient X et Y deux vecteurs formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, et α un réel.
On définit les matrices P et $Q(\alpha)$ de $\mathcal{M}$ par :
$$\begin{cases} P = E - 2X\,{}^{\text{T}}X \\ Q(\alpha) = E - 2\sin^2(\alpha)(X\,{}^{\text{T}}X + Y\,{}^{\text{T}}Y) + \sin(2\alpha)(X\,{}^{\text{T}}Y - Y\,{}^{\text{T}}X) \end{cases}$$
Pour les commodités de la rédaction, on identifiera P et Q à des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que $X\,{}^{\text{T}}X + Y\,{}^{\text{T}}Y = E$. En déduire une expression plus simple de Q. [S]
(b) Montrer que ${}^{\text{T}}Q(\alpha) = Q(-\alpha)$. [S]
(c) Montrer que P est dans $\mathcal{U}$. En donner une interprétation géométrique. [S]
(d) Même question avec la matrice $Q(\alpha)$. [S]

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}$ telle que pour toute matrice Ω de $\mathcal{U}$, on ait $< A, E - \Omega >\geq 0$.
(a) En utilisant une certaine matrice Ω, montrer que ${}^{\text{T}}XAX \geq 0$ pour tout X de $\mathbb{R}^2$. [S]
(b) En utilisant des matrices $Q(\alpha)$ montrer que pour toute base orthonormée X, Y de $\mathbb{R}^2$, on a l'égalité des réels ${}^{\text{T}}XAY = {}^{\text{T}}YAX$. [S]
(c) En déduire que A est dans $\mathcal{S}^+$ (utiliser une base orthonormée particulière de $\mathbb{R}^2$.) [S]

4. Dans toute la question, A est un élément de $\mathcal{S}^+$.
(a) Montrer que les valeurs propres et la trace de A sont positives ou nulles. [S]
(b) Montrer que pour toute matrice C de $\mathcal{M}$, $C' = {}^{\text{T}}CAC$ est un élément de $\mathcal{S}^+$. [S]
(c) Montrer que pour tout Ω de $\mathcal{U}$, on a $2 < A, E - \Omega >= \text{tr}\,({}^{\text{T}}(\Omega - E)A(\Omega - E))$. [S]

(d) En déduire que pour toute matrice Ω de $\mathcal{U}$, on a $< A, E - \Omega > \geq 0$. [S]

(e) Que conclure des question 3 et 4 ? [S]

5. Dans cette question, A est un élément de $\mathcal{S}^+$ et Ω est un élément de $\mathcal{U}$.

   (a) Montrer que $\Omega A = A \Leftrightarrow A\Omega = A$. [S]

   (b) Montrer que $A\Omega = A \Rightarrow < A, E - \Omega > = 0$. [S]

   (c) Montrer qu'il existe une matrice symétrique B telle que $A = B^2$.
   On pourra pour cela diagonaliser A. [S]

   (d) En déduire que $< A, E - \Omega > = 0 \Rightarrow B\Omega = B \Rightarrow A\Omega = A$. [S]

   (e) Montrer que $\text{tr}\,(A\Omega) \leq \text{tr}\,(A)$, et qu'on a l'égalité si et seulement si $A\Omega = A$. [S]