

Produit scalaire sur des matrices 2×2

D'après Maths II, filière PC, Centrale-Supélec 1998

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(A)$ désigne la trace de A .

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Le problème porte sur des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

L'ensemble de ces matrices sera noté \mathcal{M} .

On notera E la matrice unité : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On désignera par \mathcal{B} la base canonique de \mathcal{M} , constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note \mathcal{D} l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire de la forme aE , avec a réel.

On désigne par \mathcal{N} l'ensemble des matrices A de \mathcal{M} dont la trace est nulle.

On note $s(A)$ la "matrice complémentaire" de la matrice A , qui est par définition la transposée de la matrice des cofacteurs de A .

L'espace vectoriel \mathbb{R}^2 est identifié à l'espace des matrices colonnes $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et il est muni de sa structure euclidienne canonique pour laquelle le produit scalaire des vecteurs X et Y est donné par TXY . La norme associée est notée $X \mapsto \|X\|$.

Dans \mathcal{M} , on note \mathcal{A} l'ensemble des matrices antisymétriques, \mathcal{S} celui des matrices symétriques, et \mathcal{U} celui des matrices orthogonales.

On désigne enfin par \mathcal{S}^+ l'ensemble des matrices symétriques positives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de \mathcal{S} qui vérifient ${}^TAX \geq 0$ quel que soit X dans \mathbb{R}^2 .

Les parties (A) et (B) sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

- (a) Montrer que s est un endomorphisme de \mathcal{M} et donner sa matrice dans la base \mathcal{B} . [S]
(b) Montrer que les matrices suivantes constituent une base de \mathcal{M} ;

$$E = B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[S]

- (c) Donner la matrice de s dans cette base. [S]
- (d) Déterminer $s \circ s$. [S]
2. (a) Montrer que $s(MN) = s(N)s(M)$. [S]
- (b) Comparer, lorsque cela est possible, $s(M^{-1})$ et $s(M)^{-1}$. [S]
- (c) Pour A appartenant à \mathcal{M} , établir la relation $s(A) = -A + \text{tr}(A)E$. [S]
- (d) Montrer que si A est semblable à B , alors $s(A)$ est semblable à $s(B)$. [S]
3. (a) Montrer que \mathcal{N} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M} et préciser sa dimension. [S]
- (b) Montrer que \mathcal{N} et \mathcal{D} sont des sous-espaces supplémentaires de \mathcal{M} . [S]

Partie B

Pour M et N dans \mathcal{M} , on pose $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N)$.

1. (a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur \mathcal{M} . Préciser la norme associée. [S]
- (b) Montrer que les sous-espaces \mathcal{N} et \mathcal{D} sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre pour ce produit scalaire. [S]
- (c) Montrer qu'il en est de même pour les sous-espaces \mathcal{A} et \mathcal{S} . [S]
- (d) Montrer que pour toute matrice A de \mathcal{M} et tous vecteurs X, Y de \mathbb{R}^2 , on a les égalités $\langle A, X^T Y \rangle = {}^T X A Y = {}^T Y^T A X$. [S]
2. Soient X et Y deux vecteurs formant une base orthonormée de \mathbb{R}^2 , et α un réel. On définit les matrices P et $Q(\alpha)$ de \mathcal{M} par :
- $$\begin{cases} P = E - 2X^T X \\ Q(\alpha) = E - 2\sin^2(\alpha)(X^T X + Y^T Y) + \sin(2\alpha)(X^T Y - Y^T X) \end{cases}$$
- Pour les commodités de la rédaction, on identifiera P et Q à des endomorphismes de \mathbb{R}^2 .
- (a) Montrer que $X^T X + Y^T Y = E$. En déduire une expression plus simple de Q . [S]
- (b) Montrer que ${}^T Q(\alpha) = Q(-\alpha)$. [S]
- (c) Montrer que P est dans \mathcal{U} . En donner une interprétation géométrique. [S]
- (d) Même question avec la matrice $Q(\alpha)$. [S]
3. Soit A une matrice de \mathcal{M} telle que pour toute matrice Ω de \mathcal{U} , on ait $\langle A, E - \Omega \rangle \geq 0$.
- (a) En utilisant une certaine matrice Ω , montrer que ${}^T X A X \geq 0$ pour tout X de \mathbb{R}^2 . [S]
- (b) En utilisant des matrices $Q(\alpha)$ montrer que pour toute base orthonormée X, Y de \mathbb{R}^2 , on a l'égalité des réels ${}^T X A Y = {}^T Y A X$. [S]
- (c) En déduire que A est dans \mathcal{S}^+ (utiliser une base orthonormée particulière de \mathbb{R}^2). [S]
4. Dans toute la question, A est un élément de \mathcal{S}^+ .
- (a) Montrer que les valeurs propres et la trace de A sont positives ou nulles. [S]
- (b) Montrer que pour toute matrice C de \mathcal{M} , $C' = {}^T C A C$ est un élément de \mathcal{S}^+ . [S]
- (c) Montrer que pour tout Ω de \mathcal{U} , on a $2 \langle A, E - \Omega \rangle = \text{tr}({}^T(\Omega - E)A(\Omega - E))$. [S]



- (d) En déduire que pour toute matrice Ω de \mathcal{U} , on a $\langle A, E - \Omega \rangle \geq 0$. [S]
- (e) Que conclure des question 3 et 4? [S]
5. Dans cette question, A est un élément de \mathcal{S}^+ et Ω est un élément de \mathcal{U} .
- (a) Montrer que $\Omega A = A \Leftrightarrow A\Omega = A$. [S]
- (b) Montrer que $A\Omega = A \Rightarrow \langle A, E - \Omega \rangle = 0$. [S]
- (c) Montrer qu'il existe une matrice symétrique B telle que $A = B^2$.
On pourra pour cela diagonaliser A . [S]
- (d) En déduire que $\langle A, E - \Omega \rangle = 0 \Rightarrow B\Omega = B \Rightarrow A\Omega = A$. [S]
- (e) Montrer que $\text{tr}(A\Omega) \leq \text{tr}(A)$, et qu'on a l'égalité si et seulement si $A\Omega = A$. [S]