# Produit scalaire sur des matrices $2 \times 2$

D'après Maths II, filière PC, Centrale-Supélec 1998

Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,(A)$ désigne la trace de $A$.
On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$.

Le problème porte sur des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
L'ensemble de ces matrices sera noté $\mathcal{M}$.

On notera $E$ la matrice unité : $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On désignera par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}$, constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire de la forme $aE$, avec $a$ réel.

On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices $A$ de $\mathcal{M}$ dont la trace est nulle.

On note $s(A)$ la "matrice complémentaire" de la matrice $A$, qui est par définition la transposée de la matrice des cofacteurs de $A$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est identifié à l'espace des matrices colonnes $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et il est muni de sa structure euclidienne canonique pour laquelle le produit scalaire des vecteurs $X$ et $Y$ est donné par ${}^{\mathrm{T}}XY$. La norme associée est notée $X \mapsto \|X\|$.

Dans $\mathcal{M}$, on note $A$ l'ensemble des matrices antisymétriques, $\mathcal{S}$ celui des matrices symétriques, et $\mathcal{U}$ celui des matrices orthogonales.

On désigne enfin par $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A$ de $\mathcal{S}$ qui vérifient ${}^{\mathrm{T}}XAX \geq 0$ quel que soit $X$ dans $\mathbb{R}^2$.

Les parties (A) et (B) sont, dans une large mesure, indépendantes.

## Partie A

1. (a) Montrer que $s$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}$ et donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. [S]
   (b) Montrer que les matrices suivantes constituent une base de $\mathcal{M}$ ;

$$E = B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   [S]

(c) Donner la matrice de $s$ dans cette base. [S]

(d) Déterminer $s \circ s$. [S]

2. (a) Montrer que $s(MN) = s(N)s(M)$. [S]

(b) Comparer, lorsque cela est possible, $s(M^{-1})$ et $s(M)^{-1}$. [S]

(c) Pour $A$ appartenant à $\mathcal{M}$, établir la relation $s(A) = -A + \operatorname{tr}(A)E$. [S]

(d) Montrer que si $A$ est semblable à $B$, alors $s(A)$ est semblable à $s(B)$. [S]

3. (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et préciser sa dimension. [S]

(b) Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}$. [S]

## Partie B

Pour $M$ et $N$ dans $\mathcal{M}$, on pose $< M, N >= \operatorname{tr}(M^{\,\mathrm{T}}N)$.

1. (a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}$. Préciser la norme associée. [S]

(b) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre pour ce produit scalaire. [S]

(c) Montrer qu'il en est de même pour les sous-espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$. [S]

(d) Montrer que pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}$ et tous vecteurs $X, Y$ de $\mathbb{R}^2$, on a les égalités $< A, X\,{}^{\mathrm{T}}Y >= {}^{\mathrm{T}}XAY = {}^{\mathrm{T}}Y\,{}^{\mathrm{T}}AX$. [S]

2. Soient $X$ et $Y$ deux vecteurs formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, et $\alpha$ un réel.

On définit les matrices $P$ et $Q(\alpha)$ de $\mathcal{M}$ par :

$$\begin{cases} P = E - 2X\,{}^{\mathrm{T}}X \\ Q(\alpha) = E - 2\sin^2(\alpha)(X\,{}^{\mathrm{T}}X + Y\,{}^{\mathrm{T}}Y) + \sin(2\alpha)(X\,{}^{\mathrm{T}}Y - Y\,{}^{\mathrm{T}}X) \end{cases}$$

Pour les commodités de la rédaction, on identifiera $P$ et $Q$ à des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $X\,{}^{\mathrm{T}}X + Y\,{}^{\mathrm{T}}Y = E$. En déduire une expression plus simple de $Q$. [S]

(b) Montrer que ${}^{\mathrm{T}}Q(\alpha) = Q(-\alpha)$. [S]

(c) Montrer que $P$ est dans $\mathcal{U}$. En donner une interprétation géométrique. [S]

(d) Même question avec la matrice $Q(\alpha)$. [S]

3. Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}$ telle que pour toute matrice $\Omega$ de $\mathcal{U}$, on ait $< A, E - \Omega >\geq 0$.

(a) En utilisant une certaine matrice $\Omega$, montrer que ${}^{\mathrm{T}}XAX \geq 0$ pour tout $X$ de $\mathbb{R}^2$. [S]

(b) En utilisant des matrices $Q(\alpha)$ montrer que pour toute base orthonormée $X, Y$ de $\mathbb{R}^2$, on a l'égalité des réels ${}^{\mathrm{T}}XAY = {}^{\mathrm{T}}YAX$. [S]

(c) En déduire que $A$ est dans $\mathcal{S}^+$ (utiliser une base orthonormée particulière de $\mathbb{R}^2$.) [S]

4. Dans toute la question, $A$ est un élément de $\mathcal{S}^+$.

(a) Montrer que les valeurs propres et la trace de $A$ sont positives ou nulles. [S]

(b) Montrer que pour toute matrice $C$ de $\mathcal{M}$, $C' = {}^{\mathrm{T}}CAC$ est un élément de $\mathcal{S}^+$. [S]

(c) Montrer que pour tout $\Omega$ de $\mathcal{U}$, on a $2 < A, E - \Omega >= \operatorname{tr}({}^{\mathrm{T}}(\Omega - E)A(\Omega - E))$. [S]

(d) En déduire que pour toute matrice $\Omega$ de $\mathcal{U}$, on a $< A, E - \Omega > \geq 0$. [S]

(e) Que conclure des question 3 et 4 ? [S]

5. Dans cette question, $A$ est un élément de $\mathcal{S}^+$ et $\Omega$ est un élément de $\mathcal{U}$.

(a) Montrer que $\Omega A = A \Leftrightarrow A\Omega = A$. [S]

(b) Montrer que $A\Omega = A \Rightarrow < A, E - \Omega > = 0$. [S]

(c) Montrer qu'il existe une matrice symétrique $B$ telle que $A = B^2$.
On pourra pour cela diagonaliser $A$. [S]

(d) En déduire que $< A, E - \Omega > = 0 \Rightarrow B\Omega = B \Rightarrow A\Omega = A$. [S]

(e) Montrer que $\mathrm{tr}\,(A\Omega) \leq \mathrm{tr}\,(A)$, et qu'on a l'égalité si et seulement si $A\Omega = A$. [S]