# Familles obtusangles ou acutangles

NB : Pour la définition des matrices de Gram, voir le problème consacré à ces matrices.

$E$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On note $< u, v >$ le produit scalaire de deux vecteurs $u$ et $v$ de $E$, et $\|u\|$ la norme associée.

## Partie I : Familles strictement obtusangles

Soit $(u) = u_1, \ldots, u_m$ une famille de $m$ vecteurs de $E$.

On dit que $(u)$ est *obtusangle* si pour tous indices $i, j$ distincts de $\{1, \ldots, m\}$, $< u_i, u_j > \leq 0$.

On que cette famille est *acutangle* si pour tous $i, j$ distincts, on a $< u_i, u_j > \geq 0$.

On définit de même les familles :
- strictement obtusangles (inégalités $< u_i, u_j >< 0$ pour $i \neq j$)
- strictement acutangles (inégalités $< u_i, u_j >> 0$ pour $i \neq j$).

1. Soit $u_1, \ldots, u_m$ une famille strictement obtusangle et liée.

   existe donc $m$ scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, non tous nuls, tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = 0$.

   Quitte à remplacer ces scalaires par leurs opposés, on peut supposer que l'un au moins des $\lambda_k$ est strictement positif. On va montrer qu'alors *tous* les $\lambda_k$ sont strictement positifs.

   On note $I$ l'ensemble (non vide) des indices $i$ de $\{1, \ldots, m\}$ tels que $\lambda_i > 0$.

   Soit $J$ le complémentaire de $I$ dans $\{1, \ldots, m\}$. On suppose par l'absurde $J \neq \emptyset$.

   L'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = 0$ s'écrit alors $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) u_j$.

   Soit $v$ le vecteur de $E$ désigné par cette égalité.

   (a) Montrer que $v$ est nul. [S]

   (b) Soit $j$ un élément de $J$. Considérer $< v, u_j >$ et conclure. [S]

2. Déduire de ce qui précède qu'une famille strictement obtusangle de $m$ vecteurs est de rang $m$ ou de rang $m - 1$, et que toute famille strictement obtusangle de $E$ est nécessairement formée d'au plus $n + 1$ vecteurs. [S]

3. Dans cette question on va prouver qu'il existe effectivement dans $E$ des familles strictement obtusangles et de cardinal $n + 1$.

   On va même montrer qu'il existe une famille $u_0, u_1, \ldots, u_n$ formée de $n + 1$ vecteurs unitaires, et telle que les produits scalaires $< u_i, u_j >$ (pour tous indices $i, j$ distincts) soient égaux à une même quantité strictement négative $c$.

   Pour la commodité de la notation, une telle famille de $E$ sera dite "spéciale".

   (a) Montrer que si une telle famille existe, alors $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \overrightarrow{0}$ et $c = -\dfrac{1}{n}$. [S]

(b) On va construire une telle famille $u_0, \ldots, u_n$ par récurrence sur $n = \dim E$.
Montrer qu'une telle famille existe quand $n = 1$ ou quand $n = 2$. [S]

(c) On suppose qu'en dimension $n-1$, il existe des familles "spéciales" $v_0, \ldots, v_{n-1}$.
D'après (a), les produits scalaires deux à deux des vecteurs $v_k$ sont égaux à $-\dfrac{1}{n-1}$.
Montrer qu'il existe une famille spéciale $u_0, \ldots, u_n$ dans $E$. Conclure. [S]

4. Montrer que toute sous-famille de $n$ vecteurs extraits d'une même famille "spéciale" $(u) = u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $E$ est une base de $E$. [S]

5. Dans cette question, on prouve que les familles "spéciales" de $E$ sont les images de l'une d'entre elles par les endomorphismes orthogonaux de $E$.

(a) Montrer que si $u_0, \ldots, u_n$ est une famille "spéciale" de $E$, et si $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$, alors la famille $v_k = f(u_k)$ est encore "spéciale". [S]

(b) Réciproquement, soient $(u) = u_0, \ldots, u_n$ et $(v) = v_0, \ldots, v_n$ deux familles "spéciales".

i. Montrer qu'il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E)$ tq : $\forall j \in \{0, \ldots, n-1\}, f(u_j) = v_j$. [S]

ii. Montrer alors que $f(u_n) = v_n$. [S]

iii. Etablir que $f$ est un endomorphisme orthogonal de $E$. [S]

## Partie II : Bases associées

Dans cette partie $E$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Soit $(e) = e_1, \ldots, e_n$ une base de $E$. Montrer qu'il existe une base unique $(\widehat{e}) = \widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_n}$ de $E$ telle que, pour tous indices $i$ de $j$, $< \widehat{e_i}, e_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
On dira alors que $(\widehat{e})$ est la base *associée* à $(e)$. Ces deux bases jouant le même rôle dans les égalités précédentes, il est clair que $(e)$ est la base associée à $(\widehat{e})$. [S]

2. Quelles sont les bases de $E$ qui sont leur propre associée ? [S]

3. Soit $x$ un vecteur de $E$. Montrer que les composantes $x_i$ de $x$ dans la base $(e)$ sont les produits scalaires $< \widehat{e_i}, x >$ de $x$ avec les vecteurs de la base associée $(\widehat{e})$.
Autrement dit les coordonnées contravariantes d'un vecteur dans une base sont les coordonnées covariantes de ce vecteur dans la base associée. [S]

4. Soient $x$ et $y$ deux vecteurs de $E$. On note $x_i, y_i$ leurs composantes dans la base $(e)$ et $\widehat{x_i}, \widehat{y_i}$ leurs composantes dans la base $(\widehat{e})$ (dans les deux cas, ce sont les composantes au sens usuel, c'est-à-dire les coordonnées contravariantes.)
Exprimer très simplement $< x, y >$ et $\|x\|^2$ en fonction de ces composantes. [S]

5. On note $G$ la matrice de Gram de la base $(e)$ et $\widehat{G}$ celle de la base associée $(\widehat{e})$.
Interpréter $G$ et $\widehat{G}$ comme des matrices de passage. En déduire que $\widehat{G} = G^{-1}$. [S]

6. Dans cette question, on suppose que la base $(e)$ est obtusangle.
   On va montrer que la base associée $(\widehat{e})$ est acutangle.
   On pose $\alpha = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2$, et on définit la matrice $A = I_n - \dfrac{1}{\alpha} G$.
   (a) Montrer que $A$ est à coefficients positifs ou nuls. [S]
   (b) Montrer que $A$ et $G$ sont diagonalisables à l'aide d'une même matrice de passage. [S]
   (c) Montrer que les valeurs propres de $A$ sont dans $[0,1[$ (utiliser la question I-3). [S]
   (d) Montrer que la suite des $B_m = I_n + A + A^2 + \cdots + A^m$ converge vers $\alpha G^{-1}$.
   Indication : utiliser une réduite de $A$ à la forme diagonale. [S]
   (e) Déduire de ce qui précède que la base $(\widehat{e})$ est acutangle. [S]