Polynômes de Chebyshev de seconde espèce

D'après l'épreuve b, filière physique et chimie, du concours 1999

de l'École nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg

Dans tout le problème, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction $t \to P(t)$ de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

PARTIE I

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.

Soit φ l'application qui à tout P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. [S]
   (b) Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. [S]
   (c) Déterminer les valeurs propres de φ. [S]
   (d) Montrer que φ est diagonalisable. [S]
2. (a) Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, \ldots, P_n)$ de vecteurs propres de coefficients dominants égaux à 1, tels que pour $0 \le k \le n$, P_k soit de degré k. [S]
   (b) Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3. [S]
   (c) Préciser la parité de P_n. Calculer le coefficient de X^{n-2} dans P_n. [S]
3. On suppose dans cette question que n est impair.
   On considère l'équation différentielle $(E_n) : (1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n + 2)y = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une solution de (E_n), développable en série entière sous la forme $\sum_{p \ge 0} a_{2p}x^{2p}$, les coefficients a_{2p} (que l'on ne ne cherchera pas à calculer) étant non nuls. Déterminer le rayon de convergence. [S]
   (b) En déduire toutes les solutions de (E_n) sur l'intervalle $]-1, 1[$. [S]

   Remarque : L'étude du cas pair est analogue et elle n'est pas demandée.

PARTIE II

On note E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour f et g dans E on pose : $< f, g > = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire dans E. [S]
   (b) Calculer $< X^i, X^j >$ pour i et j dans $\mathbb{N}$. [S]

2. Pour toute f de E, de classe $\mathcal{C}^2$, on pose : $\varphi(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 3xf'(x)$.
   (a) Montrer que si f, g sont $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ alors on a $<\varphi(f), g> = < f, \varphi(g) >$. [S]
   (b) On reprend la définition des polynômes P_k vue en I-2-a.
   Montrer que : $\forall j,k \in \{0,1,\ldots,n\},\ j \neq k \Rightarrow < P_j, P_k > = 0$. [S]
   (c) En déduire que pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ et pour tout polynôme Q de degré inférieur à k, on a $< P_k, Q > = 0$ [S]
3. (a) Montrer que $P_n - XP_{n-1}$ est de degré au plus $n-1$ et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à $n-2$ (pour $n \geq 3$). [S]
   (b) En déduire que $P_n - XP_{n-1}$ est combinaison linéaire de P_{n-1} et de P_{n-2} [S]
   (c) En utilisant I-2-c, montrer que $4P_n - 4XP_{n-1} + P_{n-2} = 0$ pour $n \geq 2$. [S]
   (d) Calculer $P_n(1)$. [S]
4. (a) Montrer que $< P_n, P_n > = < P_n, X^n > = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. [S]
   (b) Calculer $< P_n, P_n >$ pour $0 \leq n \leq 2$. [S]
   (c) Pour k dans $\{0,1,\ldots,n\}$, montrer : $< P_k, X^{k+2} > = \dfrac{k+1}{4} < P_k, P_k >$. [S]
   (d) En déduire une relation entre $< P_n, P_n >$, $< P_{n-1}, P_{n-1} >$, $< P_{n-2}, P_{n-2} >$. [S]
   (e) Montrer que $< P_n, P_n > = \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$. [S]

PARTIE III

1. Montrer que les n racines réelles ou complexes de P_n sont en fait toutes réelles, distinctes deux à deux, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.
   Indication : considérer l'ensemble $\mathcal{S} = \{x_1,\ldots,x_m\}$, éventuellement vide, des racines de P_n dans $]-1,1[$ et qui sont de multiplicité impaire (chaque racine n'étant comptée qu'une fois dans $\mathcal{S}$) et utiliser le polynôme $Q = \prod_{k=1}^{m}(X - x_k)$ (avec $Q = 1$ si $\mathcal{S}$ est vide.) [S]
2. Montrer que pour tout réel θ, $\sin(n+1)\theta = 2^n(\sin\theta)P_n(\cos\theta)$. [S]
3. En déduire les différentes racines de P_n. [S]

Corrigé du problème

PARTIE I

1. (a) Il est clair que pour tout polynôme P, $\varphi(P)$ est encore un polynôme.
D'autre part, si $\deg P \leq n$, alors $\deg(1-X^2)P'' \leq n$ et $\deg XP' \leq n$.
Le polynôme $\varphi(P)$ est donc encore un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
Enfin, la linéarité de φ est évidente. [Q]

(b) Soit k un entier compris entre 0 et n :
$\varphi(X^k) = (1-X^2)k(k-1)X^{k-2} - 3X(kX^{k-1}) = -k(k+2)X^k + \overbrace{k(k-1)X^{k-2}}^{\text{nul si } k\leq 1}$.
On en déduit la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & -8 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & -15 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & (n-1)(n-2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -(n-1)(n+1) & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -n(n+2) \end{pmatrix}$$

[Q]

(c) Dans la base canonique, la matrice de φ est triangulaire. Les valeurs propres de φ sont donc les coefficients diagonaux $\lambda_k = -k(k+2)$ de cette matrice. [Q]

(d) Les $n+1$ valeurs propres λ_k de φ sont toutes distinctes. Cette application est donc diagonalisable, et tous les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. [Q]

2. (a) Si P est un polynôme unitaire de degré m, les calculs précédents montrent que le terme de plus haut degré de $\varphi(P)$ est $-m(m+2)X^m$, c'est-à-dire $\lambda_m X^m$.
On en déduit (car les λ_m sont distincts) que les polynômes propres pour λ_k (les polynômes non nuls tels que $\varphi(P) = \lambda_k P$) sont nécessairement de degré k.
Dans la droite vectorielle propre E_k pour la valeur propre λ_k, il existe un et un seul polynôme unitaire. Notons-le P_k : il est de degré k.
Ainsi il existe une unique famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ telle que pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, P_n soit unitaire, de degré k, et vecteur propre de φ pour la valeur propre λ_k. [Q]

(b) – Il est clair que $P_0 = 1$ car $\varphi(1) = 0 = \lambda_0 1$.
– De même $P_1 = X$ car $\varphi(X) = -3X = \lambda_1 X$.
– On cherche P_2 sous la forme $P_2 = X^2 + aX + b$.
$\varphi(P_2) = -8P_2 \Leftrightarrow -8X^2 + 2 - 3aX = -8(X^2 + aX + b) \Rightarrow P_2 = X^2 - \dfrac{1}{4}$.