Moindres carrés discrets

Soit n un entier positif.

On note $(u,v) \mapsto < u,v >$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, et $u \mapsto \|u\|$ la norme associée.

On considère un "nuage" $\mathcal{N} = (x_i,y_i)_{0\le i\le n-1}$ de n points (x_i,y_i) de $\mathbb{R}^2$, et on suppose que les abscisses de ces points sont deux à deux distinctes.

Soit m un entier naturel. On considère le problème suivant :

$\mathcal{P}_m$: Trouver un polynôme A, avec $\deg A \le m$, qui minimise $J(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (A(x_i)-y_i)^2$.

On dit que A, s'il existe, est la meilleure approximation de $\mathcal{N}$ *au sens des moindres carrés.*

1. On suppose $m \ge n-1$. Rappeler pourquoi le problème $\mathcal{P}_m$ admet une solution A.
   Quelle est alors la valeur de $J(A)$? Cette solution est-elle unique ?
   Dans toute la suite, on suppose que m est inférieur ou égal à $n-1$. [S]
2. (a) En évaluant $J(A+\lambda B)-J(A)$ (pour tout réel λ, et tous A,B de $\mathbb{R}_m[X]$), montrer que A est solution de $\mathcal{P}_m$ si et seulement si : $\forall B \in \mathbb{R}_m[X]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} B(x_i)(A(x_i)-y_i) = 0$. [S]
   (b) En déduire l'unicité (si existence) de la solution de $\mathcal{P}_m$. [S]

Soit $\varepsilon = (P_0,P_1,\ldots,P_m)$ une base de $\mathbb{R}_m[X]$. On note :

- $[A]$ le vecteur-colonne des composantes $a_0,\ldots,a_m$ de A dans cette base.
- $[y]$ le vecteur-colonne des ordonnées $y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}$.
- M la matrice, de type $n\times(m+1)$, de terme général $m_{i,j} = P_{j-1}(x_{i-1})$.

3. (a) Montrer que A est solution de $\mathcal{P}_m$ si et seulement si ${}^{\top}MM[A] = {}^{\top}M[y]$. [S]
   (b) Montrer que ${}^{\top}MM$ est inversible. En déduire que $\mathcal{P}_m$ a une solution unique A. [S]
   (c) Montrer qu'alors $J(A) = {}^{\top}[y]N[y]$, avec $N = I_n - M({}^{\top}MM)^{-1}\,{}^{\top}M$. [S]
   (d) Vérifier qu'on retrouve bien $J(A)=0$ quand $m=n-1$. [S]
4. On va retrouver les résultats précédents en adoptant un point de vue plus géométrique.
   Soit φ linéaire de matrice M, de $\mathbb{R}_m[X]$ muni de ε vers $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.
   (a) Vérifier que φ est injective. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{P}_m$ équivaut à trouver A dans $\mathbb{R}_m[X]$ dont l'image par φ est la projection orthogonale de $y=(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})$ sur $\operatorname{Im}\varphi$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question (3a). [S]
   (c) Géométriquement, que représente la matrice $M' = M({}^{\top}MM)^{-1}\,{}^{\top}M$?
   Retrouver ainsi le résultat de la question **3c**). [S]
5. (a) Déterminer A quand $m=0$. Que vaut alors $J(A)$? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

(b) Dans cette question, on suppose $m = 1$.
Pour simplifier les notations, on posera :

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \Sigma_x = n\,\bar{x}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \Sigma_{x2} = n\,\overline{x2}$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i = \Sigma_y = n\,\bar{y}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = \Sigma_{xy} = n\,\overline{xy}$$

On note $V_x = \overline{x2} - \overline{x}^{\,2}$ la *variance* des x_i.
On note enfin $\mathrm{cov}_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$ la *covariance* des (x_i, y_i).
Montrer que la solution de $\mathcal{P}_m$ est $A = a_1 X + a_0$, où $a_1 = \dfrac{\mathrm{cov}_{xy}}{V_x}$ et $a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}$. [S]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.