Moindres carrés discrets

Soit n un entier positif.

On note $(u, v) \mapsto < u, v >$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, et $u \mapsto \|u\|$ la norme associée.

On considère un “nuage” $\mathcal{N} = (x_i, y_i)_{0 \le i \le n-1}$ de n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, et on suppose que les abscisses de ces points sont deux à deux distinctes.

Soit m un entier naturel. On considère le problème suivant :

$\mathcal{P}_m$: Trouver un polynôme A, avec $\deg A \le m$, qui minimise $J(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (A(x_i) - y_i)^2$.

On dit que A, s'il existe, est la meilleure approximation de $\mathcal{N}$ *au sens des moindres carrés*.

1. On suppose $m \ge n - 1$. Rappeler pourquoi le problème $\mathcal{P}_m$ admet une solution A.
   Quelle est alors la valeur de $J(A)$? Cette solution est-elle unique ?
   Dans toute la suite, on suppose que m est inférieur ou égal à $n - 1$. [S]
2. (a) En évaluant $J(A+\lambda B)-J(A)$ (pour tout réel λ, et tous A, B de $\mathbb{R}_m[X]$), montrer que A est solution de $\mathcal{P}_m$ si et seulement si : $\forall B \in \mathbb{R}_m[X]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} B(x_i)(A(x_i)-y_i) = 0$. [S]
   (b) En déduire l'unicité (si existence) de la solution de $\mathcal{P}_m$. [S]

Soit $\varepsilon = (P_0, P_1, \ldots, P_m)$ une base de $\mathbb{R}_m[X]$. On note :

- $[A]$ le vecteur-colonne des composantes $a_0, \ldots, a_m$ de A dans cette base.
- $[y]$ le vecteur-colonne des ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.
- M la matrice, de type $n \times (m + 1)$, de terme général $m_{i,j} = P_{j-1}(x_{i-1})$.

3. (a) Montrer que A est solution de $\mathcal{P}_m$ si et seulement si ${}^\top M M[A] = {}^\top M[y]$. [S]
   (b) Montrer que ${}^\top M M$ est inversible. En déduire que $\mathcal{P}_m$ a une solution unique A. [S]
   (c) Montrer qu'alors $J(A) = {}^\top[y]N[y]$, avec $N = I_n - M({}^\top M M)^{-1}\,{}^\top M$. [S]
   (d) Vérifier qu'on retrouve bien $J(A) = 0$ quand $m = n - 1$. [S]
4. On va retrouver les résultats précédents en adoptant un point de vue plus géométrique.
   Soit φ linéaire de matrice M, de $\mathbb{R}_m[X]$ muni de ε vers $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.
   (a) Vérifier que φ est injective. [S]
   (b) Montrer que $\mathcal{P}_m$ équivaut à trouver A dans $\mathbb{R}_m[X]$ dont l'image par φ est la projection orthogonale de $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ sur $\operatorname{Im}\varphi$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question (3a). [S]
   (c) Géométriquement, que représente la matrice $M' = M({}^\top M M)^{-1}\,{}^\top M$?
   Retrouver ainsi le résultat de la question **3c**). [S]
5. (a) Déterminer A quand $m = 0$. Que vaut alors $J(A)$? [S]

(b) Dans cette question, on suppose $m = 1$.
Pour simplifier les notations, on posera :

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \Sigma_x = n\,\bar{x}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = \Sigma_{x2} = n\,\overline{x2}$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i = \Sigma_y = n\,\bar{y}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = \Sigma_{xy} = n\,\overline{xy}$$

On note $V_x = \overline{x2} - \overline{x}^2$ la *variance* des x_i.
On note enfin $\text{cov}_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$ la *covariance* des (x_i, y_i).
Montrer que la solution de $\mathcal{P}_m$ est $A = a_1 X + a_0$, où $a_1 = \dfrac{\text{cov}_{xy}}{V_x}$ et $a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$. [S]