Puissances d'une matrice à paramètres

Soient α et β deux réels.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. (a) A quelle condition sur α, β l'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? [S]
   (b) Calculer les valeurs propres de f. [S]
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de f. [S]
   (d) L'application f est-elle diagonalisable ? [S]
2. On pose $u = (1, -2-\beta, 1)$, $v = (0, -2, -1)$ et $w = (1, 1-\beta, -2)$.
   (a) Montrer que u, v, w forment une base de $\mathbb{R}^3$. [S]
   (b) Montrer que $(f - (\alpha-1)\mathrm{Id})^2$ est de rang 1. [S]
   (c) Vérifier que u et v forment une base de $\ker(f - (\alpha-1)\mathrm{Id})^2$. [S]
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2-\beta & -2 & 1-\beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. [S]
   (b) Déterminer la matrice N de f dans la base (u, v, w). [S]
   (c) Calculer N^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$. [S]
   (d) En déduire M^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$. [S]
4. On veut retouver M^n par une autre méthode. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer A^n, pour tout entier naturel n. [S]
   (b) Montrer que $M^n = \varphi(n)A^2 + n(\alpha-1)^{n-1}A + (\alpha-1)^n I_3$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. [S]
   (c) Calculer $\varphi(n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$, et retrouver ainsi une expression de M^n. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Corrigé du problème

1. (a) On calcule le déterminant de la matrice M :

$$\det M = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2+\beta)+(2-\alpha(3+\beta)) = \alpha^3-3\alpha+2 = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$$

L'application f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det M$ est non nul, c'est-à-dire $\Leftrightarrow$ α n'est pas élément de $\{1,-2\}$. [Q]

(b) Le polynôme caractéristique de f (de M) est :

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det(M-\lambda \mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & \alpha-\lambda & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha-\lambda-1)^2(\alpha-\lambda+2) = -(\lambda-(\alpha+2))(\lambda-(\alpha-1))\end{aligned}$$

(On s'est servi du fait que $\chi(\lambda)$ se distingue de $\det M$ en remplaçant α par $\alpha-\lambda$)
Les valeurs propres de f sont les racines de $\chi(\lambda)$, c'est-à-dire $\lambda = \alpha-1$ et $\lambda = \alpha+2$. [Q]

(c) Le vecteur $a=(x,y,z)$ est dans le sous-espace propre pour $\lambda = \alpha-1$
$\Leftrightarrow f(a) = (\alpha-1)a \Leftrightarrow (M-(\alpha-1)\mathrm{I}_3)[a] = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y+\beta z=0 \\ -(3+\beta)x-y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-(\beta+2)z \end{cases}$$

On obtient la droite vectorielle engendrée par $(1,-2-\beta,1)$.
Le vecteur $a=(x,y,z)$ est dans le sous-espace propre pour $\lambda = \alpha+2$
$\Leftrightarrow f(a) = (\alpha+2)a \Leftrightarrow (M-(\alpha+2)\mathrm{I}_3)[a] = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & \beta \\ -3-\beta & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z=0 \\ 2x-2y+\beta z=0 \\ (3+\beta)x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=(1-\beta)x \\ z=-2x \end{cases}$$

On obtient la droite vectorielle engendrée par $(1,1-\beta,-2)$. [Q]

(d) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à 2 (donc strictement inférieure à la dimension de $\mathbb{R}^3$).
On en déduit que f n'est pas diagonalisable. [Q]

2. (a) La matrice de (u,v,w) dans la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2-\beta & -2 & 1-\beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.