Puissances d'une matrice à paramètres

Soient α et β deux réels.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. (a) A quelle condition sur α, β l'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? [S]
   (b) Calculer les valeurs propres de f. [S]
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de f. [S]
   (d) L'application f est-elle diagonalisable ? [S]
2. On pose $u = (1, -2-\beta, 1)$, $v = (0, -2, -1)$ et $w = (1, 1-\beta, -2)$.
   (a) Montrer que u, v, w forment une base de $\mathbb{R}^3$. [S]
   (b) Montrer que $(f - (\alpha - 1)\mathrm{Id})^2$ est de rang 1. [S]
   (c) Vérifier que u et v forment une base de $\ker(f - (\alpha - 1)\mathrm{Id})^2$. [S]
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2-\beta & -2 & 1-\beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. [S]
   (b) Déterminer la matrice N de f dans la base (u, v, w). [S]
   (c) Calculer N^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$. [S]
   (d) En déduire M^n pour tout entier n de $\mathbb{N}$. [S]
4. On veut retouver M^n par une autre méthode. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer A^n, pour tout entier naturel n. [S]
   (b) Montrer que $M^n = \varphi(n)A^2 + n(\alpha-1)^{n-1}A + (\alpha-1)^n I_3$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. [S]
   (c) Calculer $\varphi(n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$, et retrouver ainsi une expression de M^n. [S]

Corrigé du problème

1. (a) On calcule le déterminant de la matrice M :

$$\det M = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2+\beta)+(2-\alpha(3+\beta)) = \alpha^3-3\alpha+2 = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$$

L'application f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det M$ est non nul, c'est-à-dire $\Leftrightarrow$ α n'est pas élément de $\{1,-2\}$. [Q]

(b) Le polynôme caractéristique de f (de M) est :

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det(M-\lambda \mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & \alpha-\lambda & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha-\lambda-1)^2(\alpha-\lambda+2) = -(\lambda-(\alpha+2))(\lambda-(\alpha-1))\end{aligned}$$

(On s'est servi du fait que $\chi(\lambda)$ se distingue de $\det M$ en remplaçant α par $\alpha-\lambda$)

Les valeurs propres de f sont les racines de $\chi(\lambda)$, c'est-à-dire $\lambda=\alpha-1$ et $\lambda=\alpha+2$. [Q]

(c) Le vecteur $a=(x,y,z)$ est dans le sous-espace propre pour $\lambda=\alpha-1$

$\Leftrightarrow f(a)=(\alpha-1)a \Leftrightarrow (M-(\alpha-1)\mathrm{I}_3)[a]=\overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3-\beta & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y+\beta z=0 \\ -(3+\beta)x-y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-(\beta+2)z \end{cases}$$

On obtient la droite vectorielle engendrée par $(1,-2-\beta,1)$.

Le vecteur $a=(x,y,z)$ est dans le sous-espace propre pour $\lambda=\alpha+2$

$\Leftrightarrow f(a)=(\alpha+2)a \Leftrightarrow (M-(\alpha+2)\mathrm{I}_3)[a]=\overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & \beta \\ -3-\beta & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z=0 \\ 2x-2y+\beta z=0 \\ (3+\beta)x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=(1-\beta)x \\ z=-2x \end{cases}$$

On obtient la droite vectorielle engendrée par $(1,1-\beta,-2)$. [Q]

(d) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à 2 (donc strictement inférieure à la dimension de $\mathbb{R}^3$).

On en déduit que f n'est pas diagonalisable. [Q]

2. (a) La matrice de (u,v,w) dans la base canonique est $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2-\beta & -2 & 1-\beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$