

## Puissances d'une matrice à paramètres

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3 - \beta & -1 & \alpha \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

- A quelle condition sur  $\alpha, \beta$  l'application  $f$  est-elle un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ ? [S]
  - Calculer les valeurs propres de  $f$ . [S]
  - Déterminer les sous-espaces propres de  $f$ . [S]
  - L'application  $f$  est-elle diagonalisable? [S]
- On pose  $u = (1, -2 - \beta, 1)$ ,  $v = (0, -2, -1)$  et  $w = (1, 1 - \beta, -2)$ .
  - Montrer que  $u, v, w$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . [S]
  - Montrer que  $(f - (\alpha - 1)\text{Id})^2$  est de rang 1. [S]
  - Vérifier que  $u$  et  $v$  forment une base de  $\ker(f - (\alpha - 1)\text{Id})^2$ . [S]

3. On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 - \beta & -2 & 1 - \beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . [S]
- Déterminer la matrice  $N$  de  $f$  dans la base  $(u, v, w)$ . [S]
- Calculer  $N^n$  pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ . [S]
- En déduire  $M^n$  pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ . [S]

4. On veut retrouver  $M^n$  par une autre méthode. On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3 - \beta & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculer  $A^n$ , pour tout entier naturel  $n$ . [S]
- Montrer que  $M^n = \varphi(n)A^2 + n(\alpha - 1)^{n-1}A + (\alpha - 1)^n I_3$ , où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . [S]
- Calculer  $\varphi(n)$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , et retrouver ainsi une expression de  $M^n$ . [S]

## Corrigé du problème

1. (a) On calcule le déterminant de la matrice  $M$  :

$$\det M = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3 - \beta & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 + \beta) + (2 - \alpha(3 + \beta)) = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$$

L'application  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det M$  est non nul, c'est-à-dire  $\Leftrightarrow \alpha$  n'est pas élément de  $\{1, -2\}$ . [Q]

- (b) Le polynôme caractéristique de  $f$  (de  $M$ ) est :

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 0 & -1 \\ 2 & \alpha - \lambda & \beta \\ -3 - \beta & -1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - \lambda - 1)^2(\alpha - \lambda + 2) = -(\lambda - (\alpha + 2))(\lambda - (\alpha - 1)) \end{aligned}$$

(On s'est servi du fait que  $\chi(\lambda)$  se distingue de  $\det M$  en remplaçant  $\alpha$  par  $\alpha - \lambda$ )  
Les valeurs propres de  $f$  sont les racines de  $\chi(\lambda)$ , c'est-à-dire  $\lambda = \alpha - 1$  et  $\lambda = \alpha + 2$ . [Q]

- (c) Le vecteur  $a = (x, y, z)$  est dans le sous-espace propre pour  $\lambda = \alpha - 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(a) &= (\alpha - 1)a \Leftrightarrow (M - (\alpha - 1)I_3)[a] = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \\ -3 - \beta & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y + \beta z = 0 \\ -(3 + \beta)x - y + z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -(\beta + 2)z \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient la droite vectorielle engendrée par  $(1, -2 - \beta, 1)$ .

Le vecteur  $a = (x, y, z)$  est dans le sous-espace propre pour  $\lambda = \alpha + 2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(a) &= (\alpha + 2)a \Leftrightarrow (M - (\alpha + 2)I_3)[a] = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & \beta \\ -3 - \beta & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2x - 2y + \beta z = 0 \\ (3 + \beta)x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1 - \beta)x \\ z = -2x \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient la droite vectorielle engendrée par  $(1, 1 - \beta, -2)$ . [Q]

- (d) La somme des dimensions des sous-espaces propres de  $f$  est égale à 2 (donc strictement inférieure à la dimension de  $\mathbb{R}^3$ ).

On en déduit que  $f$  n'est pas diagonalisable. [Q]

2. (a) La matrice de  $(u, v, w)$  dans la base canonique est  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 - \beta & -2 & 1 - \beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$