Quaternions

On se place dans l'algèbre $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et on définit les quatre matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ K=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\ L=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

1. (a) Former le polynôme caractéristique de J.
   Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? [S]
   (b) Reprendre la question (a) avec la matrice K. [S]
   (c) Reprendre la question (a) avec la matrice L. [S]
2. Montrer que $G=\{I,J,K,L,-I,-J,-K,-L\}$ est un sous-groupe non commutatif, pour le produit des matrices, du groupe $\mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$ des matrices inversibles d'ordre 4. [S]
3. Soient a,b,c,d quatre nombres complexes, et $A=aJ+bK+cL+dI$.
   (a) Déduire de ce qui précède une expression de A^2 en fonction de A et de I. [S]
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour que la matrice A^2 soit diagonale. Quelle est alors son expression en fonction de I ? [S]
   (c) On note A_0 la matrice A obtenue pour $d=0$. Calculer $\det A_0^2$ et en déduire $\det A_0$. [S]
4. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A en considérant le produit de la matrice $A-\lambda I$ (avec $\lambda\in\mathbb{C}$) par sa transposée. [S]
   (b) En déduire les valeurs propres de A et exprimer $\det A$ en fonction de a,b,c,d. [S]
   (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour que A admette une valeur propre quadruple. [S]
   (d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c,d pour que les valeurs propres de A soient $-i$ et i. [S]
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a,b,c,d pour que A soit inversible. [S]
6. On pose $\omega=a^2+b^2+c^2+d^2$ et on suppose que A est inversible.
   (a) Calculer $\det A^{-1}$ et déterminer A^{-1} en effectuant le produit $A^{\mathrm{T}}A$. [S]
   (b) Déterminer les valeurs propres de A^{-1}. [S]
   (c) Calculer le polynôme caractéristique de A^{-1}. [S]
7. Soit E l'ensemble des matrices A, quand (a,b,c,d) décrit $\mathbb{C}^4$.
   (a) Montrer que E est une algèbre non commutative possédant des diviseurs de zéro. [S]
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A,A' commutent dans E. [S]
8. Soit F l'ensemble des matrices A, quand (a,b,c,d) décrit $\mathbb{R}^4$.
   Montrer que toute matrice non nulle de F est inversible dans F. [S]