

## Matrices stochastiques

On note  $E_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formé des matrices  $M = (m_{ij})$  telles que :

– Pour tous indices  $i$  et  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $m_{ij} \geq 0$ .

– Pour tout indice  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$ .

1. Montrer que l'ensemble  $E_n$  est non vide et qu'il est stable pour le produit des matrices. [S]

2. Dans toute la suite du problème,  $M$  est un élément quelconque de  $E_n$ .

Montrer que 1 est valeur propre de  $M$ , et indiquer un vecteur propre associé très simple. [S]

3. Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle ou complexe de  $M$ .

On note  $u$  un vecteur propre associé, réel ou complexe.

On note  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les composantes successives de  $u$ .

(a) Soit  $h$  un indice de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $|u_h| = \max\{|u_j|, 1 \leq j \leq n\}$ .

Montrer que  $|\lambda - m_{hh}| \leq 1 - m_{hh}$ . En déduire que  $|\lambda| \leq 1$ . [S]

(b) Soit  $d = \min\{m_{jj}, 1 \leq j \leq n\}$ . Montrer que  $|\lambda - d| \leq 1 - d$ .

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Montrer que si  $d > 0$ , alors 1 est la seule valeur propre de  $M$  de module 1. [S]

4. Montrer que si  $m_{jj} > \frac{1}{2}$  pour tout indice  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , alors  $M$  est inversible. [S]

5. On suppose que pour tous indices  $(i, j)$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $m_{ij}$  est strictement positif.

Montrer que la matrice  $M - I_n$  est de rang  $n - 1$ .

Indication : si le vecteur réel  $u = (u_1, \dots, u_n)$  est dans  $\ker(M - I_n)$ , utiliser la composante  $u_i$  qui est minimum. [S]

6. Dans cette question,  $\lambda$  est une valeur propre de module 1 de  $M$ .

On va montrer que  $\lambda$  est une racine  $m$ -ième de l'unité, avec  $1 \leq m \leq n$ .

Pour cela, on note  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  un vecteur propre réel ou complexe de  $M$  pour  $\lambda$ .

Soit  $h$  un indice de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $|u_h| = \max\{|u_j|, 1 \leq j \leq n\}$ .

(a) Montrer qu'il existe un indice  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $\lambda u_h = u_k$ .

Indication : considérer l'enveloppe convexe des points  $A_k$  d'affixes  $u_k$ .

C'est une plaque polygônale  $\mathcal{P}$  incluse dans le disque de centre 0 et de rayon  $|u_h|$ .

Vérifier que le point  $B$  d'affixe  $\lambda A_h$  est un élément de  $\mathcal{P}$ . [S]

(b) En déduire qu'il existe un entier  $m$  compris entre 1 et  $n$  tel que  $\lambda^m = 1$ . [S]

7. Dans cette question, on suppose que  $\varepsilon = \min\{m_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n\}$  est strictement positif.

On s'intéresse à la suite des puissances  $M^k$  de  $M$ . On note  $m_{i,j}^{(k)}$  le terme général de  $M^k$ .

Pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on pose :

$$\begin{cases} \alpha_j^{(k)} = \min\{m_{i,j}^{(k)}, 1 \leq i \leq n\} \\ \beta_j^{(k)} = \max\{m_{i,j}^{(k)}, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

Dans les questions (a) à (d),  $j$  est fixé dans  $\{1, \dots, n\}$  et  $k$  est fixé dans  $\mathbb{N}$ .



- (a) Prouver que  $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$ . [S]
- (b) Montrer qu'il existe un couple  $(i_0, j_0)$  tel que  $\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0, j_0} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ . [S]
- (c) Montrer qu'il existe un couple  $(i_1, j_1)$  tel que  $\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq m_{i_1, j_1} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$  [S]
- (d) En déduire que  $\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$  [S]
- (e) Montrer que la suite  $(M^k)_{k \geq 0}$  converge vers une matrice  $B$  de  $E_n$  dont toutes les lignes sont identiques. [S]
- (f) Vérifier ce résultat avec la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$  [S]