Étude et calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$

I. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Dans cette partie, on note φ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

1. (a) Montrer que $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}$ pour tout k de $\mathbb{N}$. [S]

   (b) En déduire que φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (on rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$.) [S]

2. (a) Montrer que l'application $\psi : x\mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [S]

   (b) Pour tout $a>0$, montrer que $\displaystyle\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x = a\,\psi(a)+\int_0^a \psi(x)\,\mathrm{d}x$. [S]

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$.

   Cette limite est encore notée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ bien que φ soit non intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [S]

II. Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, avec $a<b$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$. [S]

2. Soit f l'application définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$.

   Montrer que f se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Dans la suite de cette partie, ce prolongement sera encore noté f. [S]

3. Pour tout entier naturel, calculer $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. [S]

4. On pose $K_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}K_n=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. [S]

5. Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

III. Calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que si $|u|\leqslant\alpha$, alors $|\,\mathrm{e}^u-1-u|\leqslant\dfrac{u^2}{2}\,\mathrm{e}^\alpha$. [S]
2. Soit φ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Pour tout (k,t) de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^{+*}$, montrer que $x\mapsto x^k\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout $t>0$, on pose $Y(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$ et $Z(t)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$. [S]
   (b) On se donne $a>0$ et h tel que $|h|\leqslant\frac{1}{2}a$.
   Montrer que $|Y(a+h)-Y(a)-hZ(a)|\leqslant\dfrac{h^2}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2\,|\varphi(x)|\,\mathrm{e}^{-ax/2}\,\mathrm{d}x$. [S]
   (c) En déduire que Y est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $Y'=Z$. [S]
   (d) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty}Y(t)=0$. [S]
3. On reprend les notations précédentes avec l'application $\varphi:x\mapsto\dfrac{\sin x}{x}$.
   (a) Vérifier rapidement que cette application φ est bien continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. [S]
   (b) Calculer $Z(t)$, pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$. [S]
   (c) En déduire que pour tout t strictement positif : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\arctan t$. [S]
   (d) Interpréter alors le résultat obtenu en (II.5) [S]

IV. Étude des intégrales $L_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\mathrm{d}x$

Dans cette partie, on note toujours φ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que φ^n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $n\geqslant 2$.
   Dans la suite de ce problème, on se propose d'étudier les intégrales $L_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi^n(x)\,\mathrm{d}x$
   Montrer que $L_{2n}>0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]
2. Dans cette question, on fixe n dans $\mathbb{N}^*$, et on va montrer que $L_{2n+1}>0$.
   On pose $u_k=\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\varphi^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout k de $\mathbb{N}$.
   (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, montrer que $u_k=(-1)^k\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin t}{t+k\pi}\right)^{2n+1}\mathrm{d}t$. [S]
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}$, prouver que $u_{2k}+u_{2k+1}>0$. [S]
   (c) En considérant $W_m=\displaystyle\int_0^{2m\pi}\varphi(x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$ (avec $m\in\mathbb{N}^*$) prouver que $L_{2n+1}>0$. [S]

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

3. Dans cette question, on va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.
   (a) Montrer que φ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. [S]
   (b) On se donne $n \geqslant 2$, et a dans $]0,\pi[$. Montrer que $0 < L_n < a + \pi\varphi^n(a) + \dfrac{1}{(n-1)\pi^{n-1}}$.
   Indication : $\mathbb{R}^+ = [0,a] \cup [a,\pi] \cup [\pi+\infty[$. [S]
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$. [S]

V. Calcul des intégrales $L_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$

Dans cette partie, $n \geqslant 2$ est fixé. On note f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin^n(x)$.

1. (a) Établir que $\forall\, k \in \{0,\dots,n-1\}$, $f_n^{(k)}(x) = \mathrm{o}(x^{n-1-k})$ au voisinage de 0.
   Indication : développements limités en 0 obtenus par Taylor-Young. [S]
   (b) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, l'application $f_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. [S]
2. Soit g une application de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a,b]$, avec $0 < a < b$. Montrer que :
   $\displaystyle\int_a^b f_n(x)g^{(n-1)}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k f_n^{(k)}(x)g^{(n-2-k)}(x)\Big]_a^b + (-1)^{n-1}\int_a^b f_n^{(n-1)}(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. [S]
3. On pose $g(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que le résultat précédent s'écrit :
   $\displaystyle\int_a^b \varphi^n(x)\,\mathrm{d}x = -\Big[\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2-k)!}{(n-1)!}\,\frac{f_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}}\Big]_a^b + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. [S]
4. Déduire de ce qui précède que $L_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{b\to+\infty}\displaystyle\int_0^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. [S]
5. Après avoir linéarisé de $f_n(x)$, montrer que :
   – Pour tout entier $n \geqslant 1$: $f_{2n}^{(2n-1)}(x) = \displaystyle\sum_{q=1}^{n}\binom{2n}{n-q}(-1)^{n-q}\,q^{2n-1}\sin(2qx)$.
   – Pour tout $n \geqslant 1$: $f_{2n+1}^{(2n)}(x) = \displaystyle\sum_{q=0}^{n}\binom{2n+1}{n-q}(-1)^{n-q}(q+\tfrac12)^{2n}\sin(2q+1)x$. [S]
6. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $L_{2n} = \dfrac{n\pi}{(2n)!}\displaystyle\sum_{q=1}^{n}\binom{2n}{n-q}(-1)^{n-q}\,q^{2n-1}$ et $L_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n)!}\displaystyle\sum_{q=0}^{n}\binom{2n+1}{n-q}(-1)^{n-q}(q+\tfrac12)^{2n}$.
   Préciser notamment les valeurs de L_k, pour $2 \leqslant k \leqslant 7$. [S]

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Corrigé du problème

I. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) On effectue le changement de variable $t = x - k\pi$:

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{k\pi+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}t$, quantité égale à $\dfrac{2}{(k+1)\pi}$. [Q]

(b) Si φ était intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on aurait $\displaystyle\int_J|\varphi| \leqslant \int_{\mathbb{R}^+}|\varphi|$ pour tout segment J de $\mathbb{R}^+$.

Or pour tout m de $\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_0^{m\pi}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m\pi}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = +\infty$. L'application φ n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [Q]

2. (a) Une fois prolongée en 0 par $\psi(0) = \dfrac{1}{2}$, l'application ψ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

D'autre part $|\psi(x)| \leqslant \dfrac{2}{x^2}$, ce qui prouve l'intégrabilité de ψ sur $[1,+\infty[$.

Compte tenu de sa continuité sur $[0,1]$, l'application ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. [Q]

(b) On intègre par partie sur $[0,a]$ (une primitive de $x\mapsto\sin x$ est $x\mapsto 1-\cos x$.)

$\displaystyle\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1-\cos x}{x}\Big]_0^a + \int_0^a\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos a}{a} + \int_0^a\psi(x)\,\mathrm{d}x$.

Le calcul précédent est justifié par la continuité de ψ en 0 et par $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$.

On a bien obtenu : $\displaystyle\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x = a\psi(a) + \int_0^a\psi(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout $a>0$. [Q]

(c) L'application ψ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x$.

D'autre part $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} a\,\psi(a) = 0$.

Le résultat de la question (b) donne donc : $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x$ bien que φ soit non intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On rappelle que l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de f continue équivaut à celle de $|f|$, qui équivaut à l'existence d'une limite finie pour $\displaystyle\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x$ quand $a\to+\infty$.

Ici l'application φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Pourtant, on a constaté que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cela tient bien sûr aux changements de signe de l'application φ sur $\mathbb{R}^+$, qui induisent des "compensations" d'aire, compensations qui ne se produisent pas pour $|\varphi|$. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.