

## Études d'intégrales à paramètres

Dans tout le problème,  $\lambda$  est un réel fixé tel que  $\lambda > 1$ , et on pose  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$ .

### Partie I. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est bien définie, et qu'elle est monotone. [S]
  - En partageant l'intervalle  $\mathbb{R}^+$  en trois parties, et pour tout  $a$  de  $]0, 1[$ , montrer que  $u_n \leq a + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda - 1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ . [S]
- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , montrer que  $u_n = n\lambda(u_n - u_{n+1})$ . [S]
  - En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $u_1$ . [S]
- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = \ln u_n + \mu \ln n$ .

  - Donner un équivalent de  $v_{n+1} - v_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . [S]
  - En déduire  $\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow |v_{n+1} - v_n| \leq \frac{M}{n(n-1)}$ . [S]
  - Montrer alors que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est convergente. [S]
  - En déduire qu'il existe un réel  $K > 0$  tel que  $u_n \sim \frac{K}{n^\mu}$ . [S]

### Partie II. Fonction $\Gamma$ . Limite de $n^\mu u_n$ .

On définit la fonction "Gamma" par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

- Préciser le domaine de définition de la fonction  $\Gamma$ . [S]
- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $c_n = \lambda n^\mu u_n$ .

  - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $t$  de  $\mathbb{R}^+$  on a  $e^{-nt^\lambda} \leq \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ . [S]
  - En déduire  $c_n \geq \Gamma(\mu)$  (poser  $z = nt^\lambda$ ). [S]
- Soit  $\varepsilon$  dans  $]0, 1[$ . Montrer :  $\exists a \in ]0, 1[, \forall t \in [0, a], \begin{cases} t(1-\varepsilon) \leq \ln(1+t) \\ \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leq \exp(-n(1-\varepsilon)t^\lambda) \end{cases}$  [S]
  - En déduire  $c_n \leq \lambda n^\mu w_n(\varepsilon)$ , avec  $w_n(\varepsilon) = \int_0^a e^{-n(1-\varepsilon)t^\lambda} dt + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda - 1}$ . [S]
  - Pour  $\varepsilon$  fixé, montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda n^\mu w_n(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\mu)}{(1-\varepsilon)^\mu}$ . [S]
- À partir des résultats précédents, déterminer la limite de la suite  $n \mapsto c_n$ . [S]
  - En déduire un équivalent de  $u_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et déterminer le réel  $K$  de la question (I.3.d) au moyen de la fonction  $\Gamma$ . [S]

**Partie III. Calcul de  $u_1$** 

On définit la fonction  $\varphi$ , à valeurs complexes, par  $\varphi(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\mu-1}}{1+te^{i\theta}} dt$ .

1. (a) Montrer que  $\varphi$  est définie sur  $I = ]-\pi, \pi[$ . [S]  
(b) Montrer que  $\varphi(0) = \lambda u_1$ . [S]
2. (a) Montrer que  $t \mapsto g_\theta(t) = \frac{-ie^{i\theta}t^\mu}{(1+te^{i\theta})^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  (avec  $\theta$  dans  $I$ ). [S]  
(b) On admet que l'application  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  et que  $\varphi'(\theta) = \int_0^{+\infty} g_\theta(t) dt$ .  
Montrer alors que  $\varphi'(\theta) = -\mu i \varphi(\theta)$  pour tout  $\theta$  de  $I$ . [S]  
(c) En déduire que, pour tout  $\theta$  de  $I$ , on a  $\varphi(\theta) = \lambda u_1 e^{-i\mu\theta}$ . [S]
3. Pour tout  $\theta$  de  $I$ , on pose  $L(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\mu \sin \theta}{1+2t \cos \theta + t^2} dt$ .  
Avec ce qui précède, montrer que  $L(\theta) = \lambda u_1 \sin(\mu\theta)$  pour tout  $\theta$  de  $I$ . [S]
4. Dans cette question,  $\theta$  est élément de  $]0, \pi[$ .  
(a) Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \theta}{1+2t \cos \theta + t^2} dt = \theta$ . [S]  
(b) Montrer que  $\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta = M(\theta) \sin \theta$ , avec  $M(\theta) = \int_0^1 \frac{(1-t^\mu)^2}{t^\mu(1+2t \cos \theta + t^2)} dt$ . [S]  
(c) Montrer que  $M(\theta)$  (bien sûr définie quand  $\theta \in I$ ) est encore définie si  $\theta = \pi$ . [S]  
(d) Déduire des résultats précédents l'inégalité  $|\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta| \leq \frac{\sin \theta}{1-\mu}$ . [S]  
(e) Montrer finalement que  $u_1 = \frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)}$ . [S]

## Corrigé du problème

 Partie I. Étude de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 

1. (a) L'application  $t \mapsto \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , et  $\frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \sim \frac{1}{t^{n\lambda}}$  avec  $n\lambda > 1$ .

Ainsi  $t \mapsto \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $u_n$  existe pour tout  $n$ .

Par ailleurs, on a  $0 \leq \frac{1}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$  pour tout  $t \geq 0$  et tout  $n \geq 1$ .

Par intégration, il en résulte  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

Ainsi la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est positive et décroissante (donc convergente). [Q]

- (b) Soit  $a$  dans  $]0, 1[$ , et  $n \geq 1$ .

On a  $u_n = I_1 + I_2 + I_3$ , où  $I_1 = \int_0^a \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$ ,  $I_2 = \int_a^1 \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$ ,  $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$ .

– Pour  $t \geq 0$  on a  $\frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leq 1$  donc  $I_1 = \int_0^a \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt \leq a$ .

– Pour  $t \geq a$ , on a  $\frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leq \frac{1}{(1+a^\lambda)^n}$  donc  $I_2 \leq \frac{1-a}{(1+a^\lambda)^n} \leq \frac{1}{(1+a^\lambda)^n}$ .

– Pour  $t > 0$  on a  $(1+t^\lambda)^n \geq t^{n\lambda}$  donc  $I_3 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n\lambda}} = \left[ \frac{t^{-n\lambda+1}}{1-n\lambda} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n\lambda-1}$ .

Par addition, on obtient  $u_n \leq a + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

On sait que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

Si on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'inégalité précédente, on obtient  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq a$ .

Mais ici  $a$  est quelconque dans  $]0, 1[$ . On obtient donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . [Q]

2. (a) On effectue une intégration par parties sur le segment  $[0, b]$ , avec  $b > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt &= \left[ \frac{t}{(1+t^\lambda)^n} \right]_0^b + n\lambda \int_0^b \frac{t^\lambda dt}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \\ &= \frac{b}{(1+b^\lambda)^n} + n\lambda \left( \int_0^b \frac{dt}{(1+t^\lambda)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Quand  $b \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt = n\lambda \left( \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\lambda)^n} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \right)$ .

Autrement dit :  $u_n = n\lambda(u_n - u_{n+1})$  pour tout  $n \geq 1$ . [Q]

- (b) On a trouvé  $u_{n+1} = \frac{n\lambda-1}{n\lambda} u_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

Par une récurrence évidente :  $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k\lambda-1}{k\lambda} = \frac{u_1}{\lambda^{n-1}(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (k\lambda-1)$ . [Q]