

Études d'intégrales à paramètres

Dans tout le problème, λ est un réel fixé tel que $\lambda > 1$, et on pose $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$.

Partie I. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie, et qu'elle est monotone. [S]
 - En partageant l'intervalle \mathbb{R}^+ en trois parties, et pour tout a de $]0, 1[$, montrer que $u_n \leq a + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda - 1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. [S]
- Pour tout n de \mathbb{N}^* , montrer que $u_n = n\lambda(u_n - u_{n+1})$. [S]
 - En déduire une expression de u_n en fonction de u_1 . [S]
- Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $v_n = \ln u_n + \mu \ln n$.

 - Donner un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ quand $n \rightarrow +\infty$. [S]
 - En déduire $\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow |v_{n+1} - v_n| \leq \frac{M}{n(n-1)}$. [S]
 - Montrer alors que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente. [S]
 - En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \sim \frac{K}{n^\mu}$. [S]

Partie II. Fonction Γ . Limite de $n^\mu u_n$.

On définit la fonction "Gamma" par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Préciser le domaine de définition de la fonction Γ . [S]
- Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $c_n = \lambda n^\mu u_n$.

 - Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* et tout t de \mathbb{R}^+ on a $e^{-nt^\lambda} \leq \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$. [S]
 - En déduire $c_n \geq \Gamma(\mu)$ (poser $z = nt^\lambda$). [S]
- Soit ε dans $]0, 1[$. Montrer : $\exists a \in]0, 1[, \forall t \in [0, a], \begin{cases} t(1-\varepsilon) \leq \ln(1+t) \\ \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leq \exp(-n(1-\varepsilon)t^\lambda) \end{cases}$ [S]
 - En déduire $c_n \leq \lambda n^\mu w_n(\varepsilon)$, avec $w_n(\varepsilon) = \int_0^a e^{-n(1-\varepsilon)t^\lambda} dt + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda - 1}$. [S]
 - Pour ε fixé, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda n^\mu w_n(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\mu)}{(1-\varepsilon)^\mu}$. [S]
- À partir des résultats précédents, déterminer la limite de la suite $n \mapsto c_n$. [S]
 - En déduire un équivalent de u_n quand $n \rightarrow \infty$, et déterminer le réel K de la question (I.3.d) au moyen de la fonction Γ . [S]

Partie III. Calcul de u_1

On définit la fonction φ , à valeurs complexes, par $\varphi(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\mu-1}}{1+te^{i\theta}} dt$.

1. (a) Montrer que φ est définie sur $I =]-\pi, \pi[$. [S]
 (b) Montrer que $\varphi(0) = \lambda u_1$. [S]
2. (a) Montrer que $t \mapsto g_\theta(t) = \frac{-ie^{i\theta}t^\mu}{(1+te^{i\theta})^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ (avec θ dans I). [S]
 (b) On admet que l'application φ est dérivable sur I et que $\varphi'(\theta) = \int_0^{+\infty} g_\theta(t) dt$.
 Montrer alors que $\varphi'(\theta) = -\mu i \varphi(\theta)$ pour tout θ de I . [S]
 (c) En déduire que, pour tout θ de I , on a $\varphi(\theta) = \lambda u_1 e^{-i\mu\theta}$. [S]
3. Pour tout θ de I , on pose $L(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\mu \sin \theta}{1+2t \cos \theta + t^2} dt$.
 Avec ce qui précède, montrer que $L(\theta) = \lambda u_1 \sin(\mu\theta)$ pour tout θ de I . [S]
4. Dans cette question, θ est élément de $]0, \pi[$.
 (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \theta}{1+2t \cos \theta + t^2} dt = \theta$. [S]
 (b) Montrer que $\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta = M(\theta) \sin \theta$, avec $M(\theta) = \int_0^1 \frac{(1-t^\mu)^2}{t^\mu(1+2t \cos \theta + t^2)} dt$. [S]
 (c) Montrer que $M(\theta)$ (bien sûr définie quand $\theta \in I$) est encore définie si $\theta = \pi$. [S]
 (d) Déduire des résultats précédents l'inégalité $|\lambda u_1 \sin(\mu\theta) - \theta| \leq \frac{\sin \theta}{1-\mu}$. [S]
 (e) Montrer finalement que $u_1 = \frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)}$. [S]

Corrigé du problème

Partie I. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. (a) L'application $t \mapsto \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , et $\frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \sim \frac{1}{t^{n\lambda}}$ avec $n\lambda > 1$.

Ainsi $t \mapsto \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ donc u_n existe pour tout n .

Par ailleurs, on a $0 \leq \frac{1}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^\lambda)^n}$ pour tout $t \geq 0$ et tout $n \geq 1$.

Par intégration, il en résulte $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 1$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est positive et décroissante (donc convergente). [Q]

- (b) Soit a dans $]0, 1[$, et $n \geq 1$.

On a $u_n = I_1 + I_2 + I_3$, où $I_1 = \int_0^a \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$, $I_2 = \int_a^1 \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$, $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt$.

– Pour $t \geq 0$ on a $\frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leq 1$ donc $I_1 = \int_0^a \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt \leq a$.

– Pour $t \geq a$, on a $\frac{1}{(1+t^\lambda)^n} \leq \frac{1}{(1+a^\lambda)^n}$ donc $I_2 \leq \frac{1-a}{(1+a^\lambda)^n} \leq \frac{1}{(1+a^\lambda)^n}$.

– Pour $t > 0$ on a $(1+t^\lambda)^n \geq t^{n\lambda}$ donc $I_3 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n\lambda}} = \left[\frac{t^{-n\lambda+1}}{1-n\lambda} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n\lambda-1}$.

Par addition, on obtient $u_n \leq a + \frac{1}{(1+a^\lambda)^n} + \frac{1}{n\lambda-1}$ pour tout $n \geq 1$.

On sait que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Si on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq a$.

Mais ici a est quelconque dans $]0, 1[$. On obtient donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. [Q]

2. (a) On effectue une intégration par parties sur le segment $[0, b]$, avec $b > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^\lambda)^n} \right]_0^b + n\lambda \int_0^b \frac{t^\lambda dt}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \\ &= \frac{b}{(1+b^\lambda)^n} + n\lambda \left(\int_0^b \frac{dt}{(1+t^\lambda)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\lambda)^n} dt = n\lambda \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\lambda)^n} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\lambda)^{n+1}} \right)$.

Autrement dit : $u_n = n\lambda(u_n - u_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$. [Q]

- (b) On a trouvé $u_{n+1} = \frac{n\lambda-1}{n\lambda} u_n$ pour tout $n \geq 1$.

Par une récurrence évidente : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k\lambda-1}{k\lambda} = \frac{u_1}{\lambda^{n-1}(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (k\lambda-1)$. [Q]