Méthode de Simpson pour des intégrales doubles

Soit f une application continue sur le segment $[a, b]$. La méthode de Simpson consiste à prendre pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la quantité $\displaystyle\frac{b-a}{6}\Big[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\Big]$.

En généralisant cette idée, on se propose de calculer une valeur approchée de $\displaystyle\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où f est une application continue sur le rectangle $\Delta = [a, A] \times [b, B]$ et à valeurs réelles.

1. On partage Δ en quatre rectangles dont les sommets sont les neuf points A_{ij} de coordonnées $x_i = a + ih$, $y_j = b + jk$, où i et j variant de 0 à 2, avec $h = \dfrac{A-a}{2}$ et $k = \dfrac{B-b}{2}$.

   (a) En utilisant la méthode de Simpson pour calculer $\displaystyle\int_b^B f(x, y)\,\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_a^A f(x, y_j)\,\mathrm{d}x$, montrer qu'on est conduit à écrire l'approximation :

   $$\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \lambda_{ij}\, f(x_i, y_j)$$

   où λ_{ij} est l'élément de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ de $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. [S]

   (b) Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\iint_\Delta \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1 + y\cos x}$, où Δ désigne l'ensemble des points M de coordonnées x et y vérifiant $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2}$. [S]

   (c) Donner la valeur approchée de I obtenue à l'aide de la formule vue en 1-a.
   Préciser pour cet exemple l'ordre de grandeur de l'erreur due à la méthode. [S]

2. On partage maintenant Δ en 16 rectangles, en introduisant les points $A_{ij} = (x_i, y_j)$ tels que $x_i = a + ih$, $y_j = b + jk$ avec $h = \dfrac{A-a}{4}$ et $k = \dfrac{B-b}{4}$, où i et j varient de 0 à 4.
   Montrer qu'on est conduit à l'approximation :

   $$\iint_\Delta f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4} \mu_{ij} f(x_i, y_j)$$

   où μ_{ij} est l'élément de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ d'une matrice N, carrée d'ordre 5, que l'on précisera.
   Appliquer cette approximation à l'intégrale $I = \displaystyle\iint_\Delta \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1 + y\cos x}$.
   Préciser l'ordre de grandeur de l'erreur de méthode. [S]