

Normes matricielles et rayon spectral

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- \mathcal{M}_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
 Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de \mathcal{M}_n , on note $(A)_{ij} = a_{ij}$ son coefficient d'indice (i, j) .
 Dans \mathcal{M}_n , on note ${}^T M$ la transposée d'une matrice M .
 On désigne par I la matrice identité, et la matrice nulle est notée 0 .
 On note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A (son *spectre*).
 On note $\rho(A)$ le nombre défini par : $\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ (le *rayon spectral* de A).
- Les éléments de \mathbb{C}^n sont identifiés à des "matrices colonnes" à n lignes.
 On note $Z = (z_k)$ un élément quelconque de \mathbb{C}^n et $(Z)_k = z_k$.
- On dira qu'une norme ψ sur \mathcal{M}_n est *matricielle* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n^2, \psi(AB) \leq \psi(A)\psi(B)$.
 Pour toute norme N sur \mathbb{C}^n , on pose : $\forall A \in \mathcal{M}_n, \tilde{N}(A) = \sup_{Z \neq 0} \frac{N(AZ)}{N(Z)}$.
 On admet que \tilde{N} est une norme matricielle sur \mathcal{M}_n (dite *associée* à N).
 Par définition $\tilde{N}(A)$ est donc le réel minimum k tel que pour tout Z de \mathbb{C}^n : $N(AZ) \leq kN(Z)$.
- On rappelle qu'une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ d'un espace vectoriel E de dimension finie et muni d'une norme N converge vers un vecteur u de E si $N(u_k - u)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, et que cela ne dépend pas de la norme utilisée.

Partie I

On rappelle que N_∞ est la norme définie sur \mathbb{C}^n par : $\forall Z = (z_k), N_\infty(Z) = \max_{1 \leq k \leq n} |z_k|$.

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de \mathcal{M}_n , on note $\varphi(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

1. Prouver que $\tilde{N}_\infty(A) \leq \varphi(A)$. [S]

2. Soit i un entier tel que $\varphi(A) = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

On définit le vecteur $Z = (z_k)$ de \mathbb{C}^n par $z_k = \frac{\overline{a_{ik}}}{|a_{ik}|}$ si $a_{ik} \neq 0$ et $z_k = 0$ sinon.

A l'aide de Z , montrer que $\tilde{N}_\infty(A) = \varphi(A)$. [S]

3. Soit ψ une norme matricielle sur \mathcal{M}_n . Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n, \rho(A) \leq \psi(A)$.

(Indication : utiliser la matrice $Z {}^T Z$, où Z est un vecteur bien choisi de \mathbb{C}^n .) [S]

Partie II

Soient A une matrice de \mathcal{M}_n . On veut prouver l'équivalence $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Soit ε un réel strictement positif.

On va d'abord montrer l'existence d'une norme N sur \mathbb{C}^n telle que $\tilde{N}(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

- Rappeler pourquoi il existe une matrice inversible U de \mathcal{M}_n telle que $T = U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. Dans toute la suite on note $T = (t_{ij})$.
Rappeler la signification de l'ensemble $S = \{t_{ii}, 1 \leq i \leq n\}$ pour la matrice A . [S]
- Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \sum_{j=i+1}^n \delta^{j-i} |t_{ij}| \leq \varepsilon$. [S]
- Avec un tel δ , soit Δ la matrice diagonale de \mathcal{M}_n de coefficients diagonaux $1, \delta, \dots, \delta^{n-1}$.
On note $V = U\Delta$, où U désigne la matrice inversible évoquée à la question II-1.
On note ψ l'application définie sur \mathcal{M}_n par $\psi(B) = \tilde{N}_\infty(V^{-1}BV)$.
 - Calculer $V^{-1}AV$ et prouver que $\psi(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$. [S]
 - Pour tout Z de \mathbb{C}^n , on pose $N(Z) = N_\infty(V^{-1}Z)$.
Montrer qu'on définit ainsi une norme N sur \mathbb{C}^n telle que $\psi = \tilde{N}$. [S]
- Montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$.
(Indication : utiliser $A^k Z$, où Z est un vecteur bien choisi de \mathbb{C}^n .) [S]
 - Réciproquement, montrer que $\rho(A) < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.
(Indication : en le justifiant, utiliser une norme matricielle \tilde{N} telle que $\tilde{N}(A) < 1$.) [S]

Partie III

- Soient σ un élément de $[0, 1[$ et N une norme sur \mathbb{C}^n .
Soit f une application σ -lipschitzienne sur l'espace vectoriel normé (\mathbb{C}^n, N) .
On considère une suite $(Z_k)_{k \geq 0}$ de \mathbb{C}^n telle que $Z_{k+1} = f(Z_k)$ pour tout k de \mathbb{N} .
 - Montrer que pour tous entiers naturels m, p , $N(Z_{m+p} - Z_m) \leq \frac{\sigma^m}{1 - \sigma} N(Z_1 - Z_0)$. [S]
 - Montrer que la suite (Z_k) est convergente et que sa limite Z vérifie $f(Z) = Z$. [S]
 - Montrer que l'application f admet un unique point fixe. [S]
- Soient W dans \mathbb{C}^n et B dans \mathcal{M}_n . Montrer que si $\rho(B) < 1$ alors il existe un vecteur X de \mathbb{C}^n tel que toutes les suites de vecteurs $(Z_k)_{k \geq 0}$ satisfaisant à $Z_{k+1} = BZ_k + W$ convergent vers le vecteur X . [S]
- Soient A une matrice inversible de \mathcal{M}_n et soit Y un vecteur de \mathbb{C}^n .
Soit M une matrice inversible de \mathcal{M}_n .
On note $F = M^{-1}$ et $Q = M - A$. On suppose $\rho(FQ) < 1$.
Utiliser F, Q, Y pour définir une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ telle que toute suite $(Z_k)_{k \geq 0}$ vérifiant $Z_{k+1} = f(Z_k)$ converge vers l'unique solution du système linéaire $AX = Y$.
Pour tout Z de \mathbb{C}^n , l'expression de $f(Z)$ en fonction de F, Q, Y, Z utilisera les seules opérations d'addition et de multiplication matricielles : en particulier elle ne fera pas appel à l'inversion matricielle. [S]

Remarque : en pratique, on prend pour M une matrice facile à inverser, par exemple une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls ; ce qui précède fournit alors (sous réserve que la condition $\rho(FQ) < 1$ soit vérifiée) une méthode numérique de résolution approchée du système linéaire $AX = Y$.