Normes matricielles et rayon spectral

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- $\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
  Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n$, on note $(A)_{ij} = a_{ij}$ son coefficient d'indice (i, j).
  Dans $\mathcal{M}_n$, on note ${}^{\mathrm{T}}M$ la transposée d'une matrice M.
  On désigne par I la matrice identité, et la matrice nulle est notée 0.
  On note $\mathrm{Sp}\,(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A (son *spectre*).
  On note $\rho(A)$ le nombre défini par : $\rho(A) = \max\{|\lambda|\,, \lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)\}$ (le *rayon spectral* de A.)
- Les éléments de $\mathbb{C}^n$ sont identifiés à des "matrices colonnes" à n lignes.
  On note $Z = (z_k)$ un élément quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $(Z)_k = z_k$.
- On dira qu'une norme ψ sur $\mathcal{M}_n$ est *matricielle* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\psi(AB) \le \psi(A)\psi(B)$.
  Pour toute norme N sur $\mathbb{C}^n$, on pose : $\forall A \in \mathcal{M}_n, \widetilde{N}(A) = \sup\limits_{Z\neq 0} \dfrac{N(AZ)}{N(Z)}$.
  On admet que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$ (dite *associée* à N.)
  Par définition $\widetilde{N}(A)$ est donc le réel minimum k tel que pour tout Z de $\mathbb{C}^n$: $N(AZ) \le kN(Z)$.
- On rappelle qu'une suite $(u_k)_{k\ge 0}$ d'un espace vectoriel E de dimension finie et muni d'une norme N converge vers un vecteur u de E si $N(u_k - u)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, et que cela ne dépend pas de la norme utilisée.

Partie I

On rappelle que N_∞ est la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par : $\forall Z = (z_k)$, $\quad N_\infty(Z) = \max\limits_{1\le k\le n} |z_k|$.

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n$, on note $\varphi(A) = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

1. Prouver que $\widetilde{N}_\infty(A) \le \varphi(A)$. [S]
2. Soit i un entier tel que $\varphi(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
   On définit le vecteur $Z = (z_k)$ de $\mathbb{C}^n$ par $z_k = \dfrac{\overline{a_{ik}}}{|a_{ik}|}$ si $a_{ik} \neq 0$ et $z_k = 0$ sinon.
   A l'aide de Z, montrer que $\widetilde{N}_\infty(A) = \varphi(A)$. [S]
3. Soit ψ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n$. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n, \rho(A) \le \psi(A)$.
   (Indication : utiliser la matrice $Z\,{}^{\mathrm{T}}Z$, où Z est un vecteur bien choisi de $\mathbb{C}^n$.) [S]

Partie II

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n$. On veut prouver l'équivalence $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Soit ε un réel strictement positif.

On va d'abord montrer l'existence d'une norme N sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\widetilde{N}(A) \le \rho(A) + \varepsilon$.

1. Rappeler pourquoi il existe une matrice inversible U de $\mathcal{M}_n$ telle que $T = U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. Dans toute la suite on note $T = (t_{ij})$.
   Rappeler la signification de l'ensemble $S = \{t_{ii}, 1 \leq i \leq n\}$ pour la matrice A. [S]
2. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que : $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} |t_{ij}| \leq \varepsilon$. [S]
3. Avec un tel δ, soit Δ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n$ de coefficients diagonaux $1, \delta, \ldots, \delta^{n-1}$.
   On note $V = U\Delta$, où U désigne la matrice inversible évoquée à la question II-1.
   On note ψ l'application définie sur $\mathcal{M}_n$ par $\psi(B) = \widetilde{N}_\infty(V^{-1}BV)$.
   (a) Calculer $V^{-1}AV$ et prouver que $\psi(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$. [S]
   (b) Pour tout Z de $\mathbb{C}^n$, on pose $N(Z) = N_\infty(V^{-1}Z)$.
   Montrer qu'on définit ainsi une norme N sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\psi = \widetilde{N}$. [S]
4. (a) Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$.
   (Indication : utiliser A^kZ, où Z est un vecteur bien choisi de $\mathbb{C}^n$.) [S]
   (b) Réciproquement, montrer que $\rho(A) < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.
   (Indication : en le justifiant, utiliser une norme matricielle $\widetilde{N}$ telle que $\widetilde{N}(A) < 1$.) [S]

Partie III

1. Soient σ un élément de $[0, 1[$ et N une norme sur $\mathbb{C}^n$.
   Soit f une application σ-lipschitzienne sur l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, N)$.
   On considère une suite $(Z_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $Z_{k+1} = f(Z_k)$ pour tout k de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tous entiers naturels m, p, $N(Z_{m+p} - Z_m) \leq \dfrac{\sigma^m}{1-\sigma} N(Z_1 - Z_0)$. [S]
   (b) Montrer que la suite (Z_k) est convergente et que sa limite Z vérifie $f(Z) = Z$. [S]
   (c) Montrer que l'application f admet un unique point fixe. [S]
2. Soient W dans $\mathbb{C}^n$ et B dans $\mathcal{M}_n$. Montrer que si $\rho(B) < 1$ alors il existe un vecteur X de $\mathbb{C}^n$ tel que toutes les suites de vecteurs $(Z_k)_{k\geq 0}$ satisfaisant à $Z_{k+1} = BZ_k + W$ convergent vers le vecteur X. [S]
3. Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$ et soit Y un vecteur de $\mathbb{C}^n$.
   Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n$.
   On note $F = M^{-1}$ et $Q = M - A$. On suppose $\rho(FQ) < 1$.
   Utiliser F, Q, Y pour définir une application $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ telle que toute suite $(Z_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $Z_{k+l} = f(Z_k)$ converge vers l'unique solution du système linéaire $AX = Y$.
   Pour tout Z de $\mathbb{C}^n$, l'expression de $f(Z)$ en fonction de F, Q, Y, Z utilisera les seules opérations d'addition et de multiplication matricielles : en particulier elle ne fera pas appel à l'inversion matricielle. [S]

Remarque : en pratique, on prend pour M une matrice facile à inverser, par exemple une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls ; ce qui précède fournit alors (sous réserve que la condition $\rho(FQ) < 1$ soit vérifiée) une méthode numérique de résolution approchée du système linéaire $AX = Y$.