

Equation différentielle linéaire et produit scalaire

D'après le concours "Mines-Ponts" 98, épreuve de Maths-1, option PC.

Pour tout réel μ , on note (E_μ) l'équation différentielle : $16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0$.

On note $E_\mu(I)$ l'espace vectoriel des solutions de (E_μ) sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Première partie

1. Intervalles de définition des solutions :

Déterminer trois intervalles I , les plus grands possible, deux à deux disjoints, pour lesquels la dimension de l'espace vectoriel $E_\mu(I)$ est égale à 2. [S]

2. Solutions développables en série entière dans un intervalle de centre 0 :

Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Déterminer la relation entre a_n et a_{n+1} ($n \geq 0$), pour que y soit solution de (E_μ) .
En déduire une expression de a_n en fonction de a_0 , n et μ (introduire $(2n)!$). [S]

(b) Le réel a_0 étant supposé différent de 0, déterminer suivant les valeurs du réel μ le rayon de convergence R . Expliciter le coefficient a_n lorsque R est infini. [S]

3. Étude de la fonction φ :

Dans cette question et dans la suivante, on suppose que $a_0 = \mu = 1$.

Soit φ la fonction définie au moins sur $] -R, R[$ par la relation : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Pour tout n , exprimer a_n à l'aide du coefficient binomial $\binom{4n}{2n}$.

Déterminer, en utilisant la formule de Stirling, deux réels α et k (k différent de 0), tels qu'un équivalent de a_n , lorsque l'entier n tend vers l'infini, soit $\frac{k}{n^\alpha}$. [S]

(b) Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur le segment $[-R, R]$. [S]

(c) Démontrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -R, R[$, puis que sa dérivée φ' admet une limite à droite en $-R$. En déduire que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-R, R]$. [S]

4. Étude de la dérivée φ' lorsque le réel x tend vers 1

(a) Un résultat préparatoire : soit une suite réelle positive $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière de terme général $b_n x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ait un rayon de convergence égal à 1.

Soit $g(x)$ la somme de cette série : $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Démontrer que si g est majorée sur $[0, 1[$ alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ est convergente. [S]

(b) Préciser la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n$.

En déduire le comportement de $\varphi'(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures. [S]



Deuxième partie

Dans cette partie, $\mu = 1$. Le but est de résoudre (E_1) sur $I =]0, 1[$.

Il pourra être utile de poser $E_1(y)(x) = 16(x^2 - x)y''(x) + (16x - 8)y'(x) - y(x)$.

Soit θ la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $\theta(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$.

1. Déterminer une équation différentielle (F) telle que la fonction y est solution de (E_1) sur I si et seulement si la fonction $z = y \circ \theta : t \mapsto y(\theta(t))$ est solution de (F) sur $]0, \pi[$. [S]
2. On admet le résultat ci-dessous, valable pour $0 < t < \pi$:

$$\cos \frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}}$$

En déduire une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur I . [S]

3. En déduire une expression de la restriction à l'intervalle I de la fonction φ étudiée dans les question (I-3) et (I-4), à l'aide de fonctions élémentaires. [S]

Troisième partie

Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions de $\bar{I} = [0, 1]$ dans \mathbb{R} et qui sont de classe \mathcal{C}^∞ .

Soit D l'endomorphisme de \mathcal{C} défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \forall x \in \bar{I}, D(f)(x) = 16(x^2 - x)f''(x) + (16x - 8)f'(x)$$

1. **L'espace préhilbertien réel $(\mathcal{C}, (|))$:**

Étant données f et g dans \mathcal{C} , montrer que $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur I .

Dans toute la suite, on notera $(f | g) = \int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx$. On admet qu'on définit ainsi

un produit scalaire : $(\mathcal{C}, (|))$ est donc un espace préhilbertien réel. [S]

2. **Une propriété de l'endomorphisme D :**

Montrer que pour toutes fonctions f et g de \mathcal{C} , on a : $(f | D(g)) = (D(f) | g)$.

Indication : on pourra vérifier que $D(f)(x) = -16\sqrt{x-x^2} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x-x^2} f'(x) \right)$. [S]

3. **Valeurs propres et sous-espaces propres :**

Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme D . Démontrer que λ est positive ou nulle.

Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes. Démontrer que les sous-espaces propres G_λ et G_μ associés sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien réel \mathcal{C} . [S]

4. **Noyau et espace image de l'endomorphisme D :**

Déterminer le noyau de l'endomorphisme D . Démontrer que toute fonction h de l'espace image $D(\mathcal{C})$ est orthogonale à la fonction constante égale à 1 : $(1 | h) = 0$. [S]

**5. Dimension du sous-espace propre G_μ associé à une valeur propre μ :**

Soit μ une valeur propre de l'endomorphisme D , et G_μ le sous-espace propre associé.

(a) Démontrer que la dimension de G_μ est inférieure ou égale à 2. [S]

(b) Soient y_1 et y_2 deux éléments de G_μ .

On définit leur wronskien $W : x \mapsto W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$.

Déterminer W et en déduire la dimension du sous-espace propre G_μ . [S]

6. Éléments propres de l'application Δ :

Soit \mathcal{P} le sous-espace de \mathcal{C} formé des restrictions à \bar{I} des fonctions polynomiales.

(a) Montrer que \mathcal{P} est stable par D . On note Δ la restriction de D à \mathcal{P} . [S]

(b) Déterminer la suite croissante $(\lambda_q)_{q \in \mathbb{N}}$ des valeurs propres de l'endomorphisme Δ ainsi que le sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ_q .

Pour chaque λ_q , préciser le degré de T_q , élément propre associé tel que $T_q(0) = 1$. [S]

(c) Montrer que l'image de Δ est l'ensemble des éléments h de \mathcal{P} tels que $(h | 1) = 0$. [S]

7. Valeurs propres de l'endomorphisme D :

(a) Soit g une fonction de \mathcal{C} supposée orthogonale au sous-espace vectoriel \mathcal{P} .

Montrer que g est la fonction nulle.

Indication : utiliser le théorème d'approximation d'une fonction continue sur un compact par une fonction polynomiale. [S]

(b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme D . [S]