

## Equation différentielle linéaire et produit scalaire

D'après le concours "Mines-Ponts" 98, épreuve de Maths-1, option PC.

Pour tout réel  $\mu$ , on note  $(E_\mu)$  l'équation différentielle :  $16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0$ .

On note  $E_\mu(I)$  l'espace vectoriel des solutions de  $(E_\mu)$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

### Première partie

#### 1. Intervalles de définition des solutions :

Déterminer trois intervalles  $I$ , les plus grands possible, deux à deux disjoints, pour lesquels la dimension de l'espace vectoriel  $E_\mu(I)$  est égale à 2. [S]

#### 2. Solutions développables en série entière dans un intervalle de centre 0 :

Soit  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

(a) Déterminer la relation entre  $a_n$  et  $a_{n+1}$  ( $n \geq 0$ ), pour que  $y$  soit solution de  $(E_\mu)$ .  
En déduire une expression de  $a_n$  en fonction de  $a_0$ ,  $n$  et  $\mu$  (introduire  $(2n)!$ ). [S]

(b) Le réel  $a_0$  étant supposé différent de 0, déterminer suivant les valeurs du réel  $\mu$  le rayon de convergence  $R$ . Expliciter le coefficient  $a_n$  lorsque  $R$  est infini. [S]

#### 3. Étude de la fonction $\varphi$ :

Dans cette question et dans la suivante, on suppose que  $a_0 = \mu = 1$ .

Soit  $\varphi$  la fonction définie au moins sur  $] -R, R[$  par la relation :  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

(a) Pour tout  $n$ , exprimer  $a_n$  à l'aide du coefficient binomial  $\binom{4n}{2n}$ .

Déterminer, en utilisant la formule de Stirling, deux réels  $\alpha$  et  $k$  ( $k$  différent de 0), tels qu'un équivalent de  $a_n$ , lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini, soit  $\frac{k}{n^\alpha}$ . [S]

(b) Démontrer que la fonction  $\varphi$  est définie et continue sur le segment  $[-R, R]$ . [S]

(c) Démontrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[$ , puis que sa dérivée  $\varphi'$  admet une limite à droite en  $-R$ . En déduire que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-R, R]$ . [S]

#### 4. Étude de la dérivée $\varphi'$ lorsque le réel $x$ tend vers 1

(a) Un résultat préparatoire : soit une suite réelle positive  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la série entière de terme général  $b_n x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ait un rayon de convergence égal à 1.

Soit  $g(x)$  la somme de cette série :  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ .

Démontrer que si  $g$  est majorée sur  $[0, 1[$  alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  est convergente. [S]

(b) Préciser la nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n$ .

En déduire le comportement de  $\varphi'(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures. [S]



## Deuxième partie

Dans cette partie,  $\mu = 1$ . Le but est de résoudre  $(E_1)$  sur  $I = ]0, 1[$ .

Il pourra être utile de poser  $E_1(y)(x) = 16(x^2 - x)y''(x) + (16x - 8)y'(x) - y(x)$ .

Soit  $\theta$  la fonction définie sur  $]0, \pi[$  par  $\theta(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$ .

1. Déterminer une équation différentielle  $(F)$  telle que la fonction  $y$  est solution de  $(E_1)$  sur  $I$  si et seulement si la fonction  $z = y \circ \theta : t \mapsto y(\theta(t))$  est solution de  $(F)$  sur  $]0, \pi[$ . [S]
2. On admet le résultat ci-dessous, valable pour  $0 < t < \pi$  :

$$\cos \frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}}}$$

En déduire une base de l'espace vectoriel des solutions de  $(E_1)$  sur  $I$ . [S]

3. En déduire une expression de la restriction à l'intervalle  $I$  de la fonction  $\varphi$  étudiée dans les question (I-3) et (I-4), à l'aide de fonctions élémentaires. [S]

## Troisième partie

Soit  $\mathcal{C}$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\bar{I} = [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et qui sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soit  $D$  l'endomorphisme de  $\mathcal{C}$  défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \forall x \in \bar{I}, D(f)(x) = 16(x^2 - x)f''(x) + (16x - 8)f'(x)$$

1. **L'espace préhilbertien réel  $(\mathcal{C}, ( | ))$  :**

Étant données  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}$ , montrer que  $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$  est intégrable sur  $I$ .

Dans toute la suite, on notera  $(f | g) = \int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ . On admet qu'on définit ainsi

un produit scalaire :  $(\mathcal{C}, ( | ))$  est donc un espace préhilbertien réel. [S]

2. **Une propriété de l'endomorphisme  $D$  :**

Montrer que pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{C}$ , on a :  $(f | D(g)) = (D(f) | g)$ .

*Indication* : on pourra vérifier que  $D(f)(x) = -16\sqrt{x-x^2} \frac{d}{dx} \left( \sqrt{x-x^2} f'(x) \right)$ . [S]

3. **Valeurs propres et sous-espaces propres :**

Soit  $\lambda$  une valeur propre de l'endomorphisme  $D$ . Démontrer que  $\lambda$  est positive ou nulle.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres distinctes. Démontrer que les sous-espaces propres  $G_\lambda$  et  $G_\mu$  associés sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien réel  $\mathcal{C}$ . [S]

4. **Noyau et espace image de l'endomorphisme  $D$  :**

Déterminer le noyau de l'endomorphisme  $D$ . Démontrer que toute fonction  $h$  de l'espace image  $D(\mathcal{C})$  est orthogonale à la fonction constante égale à 1 :  $(1 | h) = 0$ . [S]

**5. Dimension du sous-espace propre  $G_\mu$  associé à une valeur propre  $\mu$  :**

Soit  $\mu$  une valeur propre de l'endomorphisme  $D$ , et  $G_\mu$  le sous-espace propre associé.

(a) Démontrer que la dimension de  $G_\mu$  est inférieure ou égale à 2. [S]

(b) Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux éléments de  $G_\mu$ .

On définit leur wronskien  $W : x \mapsto W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ .

Déterminer  $W$  et en déduire la dimension du sous-espace propre  $G_\mu$ . [S]

**6. Éléments propres de l'application  $\Delta$  :**

Soit  $\mathcal{P}$  le sous-espace de  $\mathcal{C}$  formé des restrictions à  $\bar{I}$  des fonctions polynomiales.

(a) Montrer que  $\mathcal{P}$  est stable par  $D$ . On note  $\Delta$  la restriction de  $D$  à  $\mathcal{P}$ . [S]

(b) Déterminer la suite croissante  $(\lambda_q)_{q \in \mathbb{N}}$  des valeurs propres de l'endomorphisme  $\Delta$  ainsi que le sous-espace propre associé à chaque valeur propre  $\lambda_q$ .

Pour chaque  $\lambda_q$ , préciser le degré de  $T_q$ , élément propre associé tel que  $T_q(0) = 1$ . [S]

(c) Montrer que l'image de  $\Delta$  est l'ensemble des éléments  $h$  de  $\mathcal{P}$  tels que  $(h | 1) = 0$ . [S]

**7. Valeurs propres de l'endomorphisme  $D$  :**

(a) Soit  $g$  une fonction de  $\mathcal{C}$  supposée orthogonale au sous-espace vectoriel  $\mathcal{P}$ .

Montrer que  $g$  est la fonction nulle.

*Indication* : utiliser le théorème d'approximation d'une fonction continue sur un compact par une fonction polynomiale. [S]

(b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme  $D$ . [S]