Equation différentielle linéaire et produit scalaire

D'après le concours "Mines-Ponts" 98, épreuve de Maths-1, option PC.

Pour tout réel μ, on note (E_μ) l'équation différentielle : $16(x^2-x)y''+(16x-8)y'-\mu y=0$.
On note $E_\mu(I)$ l'espace vectoriel des solutions de (E_μ) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Première partie

1. **Intervalles de définition des solutions :**
   Déterminer trois intervalles I, les plus grands possible, deux à deux disjoints, pour lesquels la dimension de l'espace vectoriel $E_\mu(I)$ est égale à 2. [S]

2. **Solutions développables en série entière dans un intervalle de centre** 0 **:**
   Soit $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$.

   (a) Déterminer la relation entre a_n et a_{n+1} $(n\geqslant 0)$, pour que y soit solution de (E_μ). En déduire une expression de a_n en fonction de a_0, n et μ (introduire $(2n)!$). [S]

   (b) Le réel a_0 étant supposé différent de 0, déterminer suivant les valeurs du réel μ le rayon de convergence R. Expliciter le coefficient a_n lorsque R est infini. [S]

3. **Étude de la fonction** φ **:**
   Dans cette question et dans la suivante, on suppose que $a_0=\mu=1$.
   Soit φ la fonction définie au moins sur $]-R,R[$ par la relation : $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   (a) Pour tout n, exprimer a_n à l'aide du coefficient binômial $\binom{4n}{2n}$.
   Déterminer, en utilisant la formule de Stirling, deux réels α et k (k différent de 0), tels qu'un équivalent de a_n, lorsque l'entier n tend vers l'infini, soit $\dfrac{k}{n^\alpha}$. [S]

   (b) Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur le segment $[-R,R]$. [S]

   (c) Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$, puis que sa dérivée φ' admet une limite à droite en $-R$. En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R,R[$. [S]

4. **Étude de la dérivée** φ' **lorsque le réel** x **tend vers** 1

   (a) Un résultat préparatoire : soit une suite réelle positive $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière de terme général $b_n x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ ait un rayon de convergence égal à 1.
   Soit $g(x)$ la somme de cette série : $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
   Démontrer que si g est majorée sur $[0,1[$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ est convergente. [S]

   (b) Préciser la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n$.
   En déduire le comportement de $\varphi'(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, $\mu = 1$. Le but est de résoudre (E_1) sur $I =]0,1[$.

Il pourra être utile de poser $E_1(y)(x) = 16(x^2 - x)y''(x) + (16x - 8)y'(x) - y(x)$.

Soit θ la fonction définie sur $]0,\pi[$ par $\theta(t) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos t)$.

1. Déterminer une équation différentielle (F) telle que la fonction y est solution de (E_1) sur I si et seulement si la fonction $z = y \circ \theta : t \mapsto y(\theta(t))$ est solution de (F) sur $]0,\pi[$. [S]
2. On admet le résultat ci-dessous, valable pour $0 < t < \pi$:

$$\cos\frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{t}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}}$$

   En déduire une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur I. [S]
3. En déduire une expression de la restriction à l'intervalle I de la fonction φ étudiée dans les question (I-3) et (I-4), à l'aide de fonctions élémentaires. [S]

Troisième partie

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\bar{I} = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}$ défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C},\ \forall x \in \bar{I},\ D(f)(x) = 16(x^2 - x)f''(x) + (16x - 8)f'(x)$$

1. **L'espace préhilbertien réel $(\mathcal{C}, (\ |\ ))$:**
   Étant données f et g dans $\mathcal{C}$, montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur I.
   Dans toute la suite, on notera $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$. On admet qu'on définit ainsi un produit scalaire : $(\mathcal{C}, (\ |\ ))$ est donc un espace préhilbertien réel. [S]
2. **Une propriété de l'endomorphisme D :**
   Montrer que pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{C}$, on a : $(f \mid D(g)) = (D(f) \mid g)$.
   Indication : on pourra vérifier que $D(f)(x) = -16\sqrt{x - x^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sqrt{x - x^2}f'(x)\Big)$. [S]
3. **Valeurs propres et sous-espaces propres :**
   Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme D. Démontrer que λ est positive ou nulle.
   Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes. Démontrer que les sous-espaces propres G_λ et G_μ associés sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}$. [S]
4. **Noyau et espace image de l'endomorphisme D :**
   Déterminer le noyau de l'endomorphisme D. Démontrer que toute fonction h de l'espace image $D(\mathcal{C})$ est orthogonale à la fonction constante égale à 1 : $(1 \mid h) = 0$. [S]

5. **Dimension du sous-espace propre G_μ associé à une valeur propre μ :**
Soit μ une valeur propre de l'endomorphisme D, et G_μ le sous-espace propre associé.
   (a) Démontrer que la dimension de G_μ est inférieure ou égale à 2. [S]
   (b) Soient y_1 et y_2 deux éléments de G_μ.
   On définit leur wronskien $W : x \mapsto W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$.
   Déterminer W et en déduire la dimension du sous-espace propre G_μ. [S]

6. **Éléments propres de l'application Δ :**
Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ formé des restrictions à $\bar{I}$ des fonctions polynomiales.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par D. On note Δ la restriction de D à $\mathcal{P}$. [S]
   (b) Déterminer la suite croissante $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{N}}$ des valeurs propres de l'endomorphisme Δ ainsi que le sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ_q.
   Pour chaque λ_q, préciser le degré de T_q, élément propre associé tel que $T_q(0) = 1$. [S]
   (c) Montrer que l'image de Δ est l'ensemble des éléments h de $\mathcal{P}$ tels que $(h \mid 1) = 0$. [S]

7. **Valeurs propres de l'endomorphisme D :**
   (a) Soit g une fonction de $\mathcal{C}$ supposée orthogonale au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$.
   Montrer que g est la fonction nulle.
   Indication : utiliser le théorème d'approximation d'une fonction continue sur un compact par une fonction polynomiale. [S]
   (b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme D. [S]