

## Séries numériques et équation différentielle linéaire

D'après le concours IENAC 95, épreuve commune.

### Première partie

Dans cette partie on considère une série de terme général  $u_n > 0$ , définie à partir du rang  $n_0$  et de somme partielle  $U_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$  pour  $n \geq n_0$ .

1. On suppose qu'il existe une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs, un entier  $n_1 \geq n_0$  et un réel  $K > 0$  tels que  $b_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} > K$  pour tout  $n \geq n_1$ .

Établir alors l'existence d'un réel  $M$ , qu'on exprimera en fonction de  $K, b_{n_1}, u_{n_1}$  et  $U_{n_1}$ , tel que pour tout  $n \geq n_1$  on ait  $U_n < M$ .

Que peut-on en conclure pour la suite  $(U_n)$  et pour la série de terme général  $u_n$ ? [S]

2. On suppose qu'il existe une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^{+*}$  telle que la série  $\sum \frac{1}{b_n}$  soit divergente, et un entier  $n_1 \geq n_0$  tels que  $b_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} < 0$  pour tout  $n \geq n_1$ .

Que peut-on alors dire de la nature de la série de terme général  $u_n$ ? [S]

3. Dédurre de ce qui précède un critère d'étude de la série  $\sum u_n$  lorsque  $b_n = n$ . [S]

4. On suppose maintenant que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \ell$ , où  $\ell$  est un réel.

Que peut-on alors dire de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  ?

Le critère de d'Alembert permet-il de déterminer la nature de la série  $\sum u_n$  quand  $\ell < 0$ , ou quand  $\ell \geq 0$ , et pourquoi? [S]

5. Démontrer que les résultats précédents permettent de déterminer la nature de  $\sum u_n$  quand :  $\ell > 1$ , ou  $\ell < 1$ , ou  $\ell = 1^-$  (c'est-à-dire  $\ell = 1$  par valeurs inférieures). [S]

### Deuxième partie

Soit  $(E)$  l'équation différentielle linéaire  $x(4-x)y' + (2-x)y - 1 = 0$ .

1. (a) Supposant que la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est solution de  $(E)$  dans un intervalle de centre 0, déterminer  $a_0$  et la relation liant  $a_n$  et  $a_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ . [S]

(b) Déterminer l'unique série entière dont les coefficients vérifient ces conditions. [S]

(c) Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série. [S]

2. On pose  $v_n = a_n(-R)^n$  et  $w_n = a_n R^n$ .

(a) Montrer que  $w_n$  peut se mettre sous la forme du produit  $w_n = A \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+t_k}$  où  $A$  et  $t_k$  sont des réels à déterminer.

Déterminer la nature de la suite  $(\ln w_n)$  puis la limite de la suite  $(w_n)$ . [S]

- (b) Préciser la nature de la série de terme général  $v_n$ . [S]  
(c) Etudier la nature de la série  $\sum w_n$  en utilisant les résultats de la partie I. [S]
3. Donner pour la série entière de la question II-1, le plus grand intervalle de convergence, puis le plus grand intervalle de convergence absolue. [S]
4. En déduire l'existence d'une fonction  $f$ , développable en série entière sur un intervalle à préciser, et qui est solution de  $(E)$  sur cet intervalle. [S]

### Troisième partie

1. (a) A tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0, 4[$  on associe l'intégrale  $F(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{u(4-u)}}$ .  
Prouver que cette intégrale existe et qu'elle a une limite finie quand  $x$  tend vers 4.  
Vérifier que  $F(x)$  s'écrit  $F(x) = \alpha \arcsin \phi(x)$  (déterminer  $\alpha$  et la fonction  $\phi$ ). [S]  
(b) Donner une expression, valable sur  $]0, 4[$ , de la solution générale de  $(E)$ . [S]  
(c) Démontrer qu'il existe une solution unique  $y_1$  de  $(E)$  sur  $]0, 4[$  admettant une limite finie en 0 et exprimer cette solution à l'aide de  $F$ . [S]
2. On étudie, dans cette question, les solutions de  $(E)$  dans  $] - \infty, 0[$ .  
Dans ce but, on introduit l'intégrale  $G(x) = \int_x^0 \frac{du}{\sqrt{u(u-4)}}$ .  
(a) Montrer que cette intégrale existe et qu'elle s'écrit sous la forme  $G(x) = \beta \operatorname{argsh} \psi(x)$  (préciser le réel  $\beta$  et la fonction  $\psi$ ). On rappelle que :  
– La fonction  $\operatorname{argsh}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .  
– Elle est la bijection réciproque de l'application  $x \mapsto \operatorname{sh} x$ .  
– Sa dérivée est l'application  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .  
[S]  
(b) Donner une expression des solutions de  $(E)$  sur  $] - \infty, 0[$ . [S]  
(c) Démontrer qu'il existe une solution unique  $y_2$  de  $(E)$  sur  $] - \infty, 0[$  admettant une limite finie au point 0 et exprimer cette solution à l'aide de  $G$ . [S]
3. Donner une expression, valable sur l'intervalle  $]4, +\infty[$ , de la solution générale de  $(E)$ . [S]

### Quatrième partie

On se propose de chercher s'il existe des solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. (a) Déterminer la dérivée à droite de  $y_1$  et la dérivée à gauche de  $y_2$  en  $x = 0$ . [S]  
(b) Prouver alors qu'il existe, sur l'intervalle  $] - \infty, 4[$ , une solution  $g$  de  $(E)$  dont la restriction à l'intervalle  $] - 4, 4[$  est égale à  $f$ . [S]
2. Montrer qu'il existe une solution unique  $h$  de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .  
Pour cela, on utilisera le changement de variable  $t = 4 - x$ . [S]
3. Etudier l'existence de solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . [S]

## Corrigé du problème

### Première partie

Dans cette partie on considère une série de terme général  $u_n > 0$ , définie à partir du rang  $n_0$  et

de somme partielle  $U_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$  pour  $n \geq n_0$ .

1. – L'hypothèse faite ici s'écrit :  $\forall m \geq n_1, b_m u_m - b_{m+1} u_{m+1} > K u_{m+1}$   
 et elle implique :  $\forall n > n_1, b_{n_1} - b_n u_n > K \sum_{m=n_1}^{n-1} u_{m+1} = K[U_n - U_{n_1}]$ .

Remarque : cette inégalité est évidente si  $n = n_1$ .

- On constate que la suite  $(U_n)$ , dont on sait qu'elle est croissante (car les  $u_n$  sont  $> 0$ ) est majorée. Cette suite est donc convergente, ce qui signifie que la série  $\sum u_n$  est elle-même convergente.

[Q]

2. L'hypothèse faite ici implique que :  $\forall n \geq n_1, b_n u_n < b_{n+1} u_{n+1}$ , ce qui signifie que la suite  $(b_n u_n)$  est croissante pour  $n \geq n_1$ .

En particulier :  $\forall n \geq n_1, 0 < b_{n_1} u_{n_1} \leq b_n u_n$ .

Cela s'écrit :  $\forall n \geq n_1, u_n \geq \frac{\lambda}{b_n}$ , avec  $\lambda = b_{n_1} u_{n_1} > 0$ .

La série  $\sum \frac{1}{b_n}$  étant divergente, cela implique que la série  $\sum u_n$  est divergente. [Q]

3. Avec  $b_n = n$ , la quantité  $b_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1}$  s'écrit :  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1$ .

On peut donc affirmer :

- Si  $\exists n_1 \geq n_0$  tq :  $\forall n \geq n_1, n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1$ , alors  $\sum u_n$  est divergente.

On utilise en effet ici le fait que la série  $\sum \frac{1}{b_n} = \sum \frac{1}{n}$  est divergente.

Cela se produit en particulier si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1$ .

- Si  $\exists n_1 \geq n_0$  et  $K > 0$  tq :  $\forall n \geq n_1, n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1 + K$ , alors  $\sum u_n$  est convergente.

Cela se produit en particulier si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1$ .

[Q]

4. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse,  $\exists n_1 \geq n_0$  tq :  $n \geq n_1 \Rightarrow \left| n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - \ell \right| \leq 1$ .

On en déduit :  $n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right| \leq \frac{1 + |\ell|}{n} \rightarrow 0$ .

Cela implique  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$

(C'est le cas douteux de la règle de d'Alembert.)