Séries numériques et équation différentielle linéaire

D'après le concours IENAC 95, épreuve commune.

Première partie

Dans cette partie on considère une série de terme général $u_n > 0$, définie à partir du rang n_0 et de somme partielle $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$.

1. On suppose qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, un entier $n_1 \geq n_0$ et un réel $K > 0$ tels que $b_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} > K$ pour tout $n \geq n_1$.
   Établir alors l'existence d'un réel M, qu'on exprimera en fonction de K, b_{n_1}, u_{n_1} et U_{n_1}, tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $U_n < M$.
   Que peut-on en conclure pour la suite (U_n) et pour la série de terme général u_n ? [S]
2. On suppose qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que la série $\sum \dfrac{1}{b_n}$ soit divergente, et un entier $n_1 \geq n_0$ tels que $b_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1} < 0$ pour tout $n \geq n_1$.
   Que peut-on alors dire de la nature de la série de terme général u_n ? [S]
3. Déduire de ce qui précède un critère d'étude de la série $\sum u_n$ lorsque $b_n = n$. [S]
4. On suppose maintenant que $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \ell$, où ℓ est un réel.
   Que peut-on alors dire de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?
   Le critère de d'Alembert permet-il de déterminer la nature de la série $\sum u_n$ quand $\ell < 0$, ou quand $\ell \geq 0$, et pourquoi ? [S]
5. Démontrer que les résultats précédents permettent de déterminer la nature de $\sum u_n$ quand : $\ell > 1$, ou $\ell < 1$, ou $\ell = 1^-$ (c'est-à-dire $\ell = 1$ par valeurs inférieures). [S]

Deuxième partie

Soit (E) l'équation différentielle linéaire $x(4-x)y' + (2-x)y - 1 = 0$.

1. (a) Supposant que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) dans un intervalle de centre 0, déterminer a_0 et la relation liant a_n et a_{n-1} pour tout $n \geq 1$. [S]
   (b) Déterminer l'unique série entière dont les coefficients vérifient ces conditions. [S]
   (c) Déterminer le rayon de convergence R de cette série. [S]
2. On pose $v_n = a_n(-R)^n$ et $w_n = a_n R^n$.
   (a) Montrer que w_n peut se mettre sous la forme du produit $w_n = A \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+t_k}$ où A et t_k sont des réels à déterminer.
   Déterminer la nature de la suite $(\ln w_n)$ puis la limite de la suite (w_n). [S]

(b) Préciser la nature de la série de terme général v_n. [S]

(c) Etudier la nature de la série $\sum w_n$ en utilisant les résultats de la partie I. [S]

3. Donner pour la série entière de la question II-1, le plus grand intervalle de convergence, puis le plus grand intervalle de convergence absolue. [S]
4. En déduire l'existence d'une fonction f, développable en série entière sur un intervalle à préciser, et qui est solution de (E) sur cet intervalle. [S]

Troisième partie

1. (a) A tout réel x de l'intervalle $]0,4[$ on associe l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(4-u)}}$.

   Prouver que cette intégrale existe et qu'elle a une limite finie quand x tend vers 4.
   Vérifier que $F(x)$ s'écrit $F(x) = \alpha \arcsin \phi(x)$ (déterminer α et la fonction ϕ.) [S]

   (b) Donner une expression, valable sur $]0,4[$, de la solution générale de (E). [S]

   (c) Démontrer qu'il existe une solution unique y_1 de (E) sur $]0,4[$ admettant une limite finie en 0 et exprimer cette solution à l'aide de F. [S]

2. On étudie, dans cette question, les solutions de (E) dans $]-\infty,0[$.

   Dans ce but, on introduit l'intégrale $G(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(u-4)}}$.

   (a) Montrer que cette intégrale existe et qu'elle s'écrit sous la forme $G(x) = \beta \operatorname{argsh} \psi(x)$ (préciser le réel β et la fonction ψ.). On rappelle que :
   - La fonction argsh est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
   - Elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto \operatorname{sh} x$.
   - Sa dérivée est l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   [S]

   (b) Donner une expression des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$. [S]

   (c) Démontrer qu'il existe une solution unique y_2 de (E) sur $]-\infty,0[$ admettant une limite finie au point 0 et exprimer cette solution à l'aide de G. [S]

3. Donner une expression, valable sur l'intervalle $]4,+\infty[$, de la solution générale de (E). [S]

Quatrième partie

On se propose de chercher s'il existe des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Déterminer la dérivée à droite de y_1 et la dérivée à gauche de y_2 en $x=0$. [S]

   (b) Prouver alors qu'il existe, sur l'intervalle $]-\infty,4[$, une solution g de (E) dont la restriction à l'intervalle $]-4,4[$ est égale à f. [S]

2. Montrer qu'il existe une solution unique h de (E) sur $]0,+\infty[$.
   Pour cela, on utilisera le changement de variable $t = 4-x$. [S]
3. Etudier l'existence de solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

Dans cette partie on considère une série de terme général $u_n > 0$, définie à partir du rang n_0 et de somme partielle $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$.

1. – L'hypothèse faite ici s'écrit : $\forall m \geq n_1,\ b_m u_m - b_{m+1} u_{m+1} > K u_{m+1}$

   et elle implique : $\forall n > n_1,\ b_{n_1} - b_n u_n > K \sum_{m=n_1}^{n-1} u_{m+1} = K[U_n - U_{n_1}]$.

   Remarque : cette inégalité est évidente si $n = n_1$.

   – On constate que la suite (U_n), dont on sait qu'elle est croissante (car les u_n sont > 0) est majorée. Cette suite est donc convergente, ce qui signifie que la série $\sum u_n$ est elle-même convergente.

   [Q]
2. L'hypothèse faite ici implique que : $\forall n \geq n_1,\ b_n u_n < b_{n+1} u_{n+1}$, ce qui signifie que la suite $(b_n u_n)$ est croissante pour $n \geq n_1$.
   En particulier : $\forall n \geq n_1,\ 0 < b_{n_1} u_{n_1} \leq b_n u_n$.
   Cela s'écrit : $\forall n \geq n_1, u_n \geq \dfrac{\lambda}{b_n}$, avec $\lambda = b_{n_1} u_{n_1} > 0$.
   La série $\sum \dfrac{1}{b_n}$ étant divergente, cela implique que la série $\sum u_n$ est divergente. [Q]
3. Avec $b_n = n$, la quantité $b_n \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - b_{n+1}$ s'écrit : $n(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1) - 1$.
   On peut donc affirmer :
   – Si $\exists n_1 \geq n_0$ tq : $\forall n \geq n_1,\ n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$, alors $\sum u_n$ est divergente.

   On utilise en effet ici le fait que la série $\sum \dfrac{1}{b_n} = \sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.

   Cela se produit en particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$.
   – Si $\exists n_1 \geq n_0$ et $K > 0$ tq : $\forall n \geq n_1,\ n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + K$, alors $\sum u_n$ est convergente.

   Cela se produit en particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$.

   [Q]
4. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $\exists n_1 \geq n_0$ tq : $n \geq n_1 \Rightarrow \left| n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - \ell \right| \leq 1$.

   On en déduit : $n \geq n_1 \Rightarrow \left| \dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right| \leq \dfrac{1 + |\ell|}{n} \to 0$.

   Cela implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1$
   (C'est le cas douteux de la règle de d'Alembert.)