

Polynômes orthogonaux (cas "Legendre")

Le problème se compose de trois parties qui ne sont pas indépendantes.

Tous les résultats utiles sont clairement indiqués dans l'énoncé.

Soient a et b deux réels, avec $a < b$. On désigne par $\mathcal{E} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications qui sont définies et continues sur le segment $[a, b]$, et qui sont à valeurs réelles.

\mathcal{P} désigne le sous-espace de \mathcal{E} formé des applications polynomiales, et \mathcal{P}_n est le sous-espace de celles qui sont de degré inférieur ou égal à l'entier naturel n .

On se donne une application ω de \mathcal{E} , telle que : $\forall x \in]a, b[, \omega(x) > 0$.

Pour f et g dans \mathcal{E} , on note $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x) dx$.

Il est clair qu'on définit ainsi un produit scalaire sur \mathcal{E} .

Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

On dit qu'une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de \mathcal{P} est *orthogonale à degrés échelonnés* (on note *ODE*) si :

- $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \Rightarrow \langle P_m, P_n \rangle = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$.

1. Rappeler pour quelle raison il est possible de construire de telles suites dans \mathcal{P} [S]
2. Dans le reste de cette partie, on note $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite *ODE* donnée de \mathcal{P} .
Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* pour tout Q de \mathcal{P}_{n-1} , on a : $\langle P, Q \rangle = 0$. [S]
3. Montrer qu'une suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ de \mathcal{P} est *ODE* si et seulement si pour tout entier naturel n , il existe un scalaire λ_n tel que $Q_n = \lambda_n P_n$. [S]
4. En déduire qu'il existe une unique suite *ODE* formée de polynômes unitaires (c'est-à-dire ayant 1 comme coefficient du terme de plus haut degré.) [S]
5. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . On veut montrer que les racines de P_n sont toutes réelles, distinctes deux à deux, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]a, b[$.

Pour cela, on note $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n qui appartiennent à $]a, b[$ et qui sont de multiplicité impaire. Dans cette notation, x_1, \dots, x_m sont distinctes deux à deux.

On note enfin $Q_m = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$, et on pose $Q = 1$ si \mathcal{S} est vide.

- (a) Montrer que m est inférieur ou égal à n . [S]
 - (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que m est égal à n . [S]
 - (c) Conclure [S]
6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- (a) Montrer que les polynômes $P_0, P_1, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}, XP_{n-1}$ forment une base de \mathcal{P}_n .

On note ainsi $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ les réels tels que : $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n XP_{n-1}$. [S]



- (b) Montrer que pour tout indice j de $\{0, \dots, n-3\}$, le coefficient α_j est nul. [S]
- (c) En déduire qu'il existe trois suites réelles $(a_n)_{n \geq 2}$, $(b_n)_{n \geq 2}$ et $(c_n)_{n \geq 2}$ telles que :
 $\forall n \geq 2, P_n = (a_n X + b_n)P_{n-1} + c_n P_{n-2}$. [S]

Deuxième Partie : polynômes de Legendre

Dans cette partie, $a = -1$, $b = 1$, et ω est la fonction constante $x \mapsto 1$.

Cette partie est consacrée à l'étude d'une suite orthogonale à degrés étagés particulière.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (L_n) de \mathcal{P} , ODE et telle que pour tout entier n , on ait $L_n(1) = 1$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. [S]
2. Pour tout entier naturel n , on pose $U_n(X) = (x^2 - 1)^n$.
 - (a) Soit f une application de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^n .
Montrer que $\langle U, f^{(n)} \rangle = (-1)^n \langle U_n, f \rangle$. [S]
 - (b) Montrer que $(U^{(n)})_{n \geq 0}$ est une suite ODE de \mathcal{P} . [S]
 - (c) Calculer la valeur de $U^{(n)}(1)$ (utiliser la formule de Leibniz). [S]
 - (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ (Formule de Rodriguès). [S]
 - (e) Expliciter le polynôme L_n pour $0 \leq n \leq 4$. [S]
 - (f) Montrer que L_n a la parité de n , et que son coefficient dominant vaut $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. [S]
 - (g) Si on pose $L_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \alpha_k x^{n-2k}$, calculer α_k en fonction de n et de k . [S]
3. On reprend ici les notations de la question I-6-c.
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $b_n = 0$ puis $a_n = \frac{2n-1}{n}$. [S]
 - (b) Etablir finalement que pour tout $n \geq 2$, $L_n = \frac{2n-1}{n} x L_{n-1} - \frac{n-1}{n} L_{n-2}$ (E₁). [S]
4. (a) Utiliser la relation précédente pour montrer successivement que :
 - i. $\forall n \geq 2, n \langle L_n, L_n \rangle = (2n-1) \langle L_{n-1}, x L_n \rangle$. [S]
 - ii. $\forall n \geq 2, (2n-1) \langle L_{n-2}, x L_{n-1} \rangle = (n-1) \langle L_{n-2}, L_{n-2} \rangle$. [S]
 - iii. $\forall n \geq 2, (2n+1) \langle L_n, L_n \rangle = (2n-1) \langle L_{n-1}, L_{n-1} \rangle$. [S](b) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$. [S]
5. En considérant l'égalité $(x^2 - 1)U'_n = 2nxU_n$, montrer :
 $\forall n \in \mathbb{N}, (x^2 - 1)L''_n + 2xL'_n - n(n+1)L_n = 0$ (E₂). [S]
6. (a) A partir de $U'_n = 2nxU_{n-1}$ prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, L'_n = xL'_{n-1} + nL_{n-1}$ (E₃). [S]

- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, nL_n = xL'_n - L'_{n-1}$ (E₄).
 (indication : dériver (E₁) et combiner le résultat avec (E₃.) [S]
- (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x^2 - 1)L'_n = n(xL_n - L_{n-1})$ (E₅). [S]
7. On sait (cf I-5-c) que les tous zéros de L_n (si $n \geq 1$) sont réels distincts, et dans $] - 1, 1[$.
 On veut montrer que pour tout $n \geq 2$, les zéros de L_{n-1} "séparent" les n zéros de L_n .
 On note $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ les zéros de L_n .
 On note $-1 < y_1 < \dots < y_{n-1} < 1$ les zéros de L_{n-1} .
- (a) Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, montrer que $L_{n-1}(x_k)$ a le signe de $L'_n(x_k)$. [S]
- (b) En déduire que $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, y_k \in]x_k, x_{k+1}[$. [S]

Troisième Partie : quadratures de Gauss

On reprend les notations de la partie II, et notamment les polynômes de Legendre L_n .
 On va utiliser ces polynômes dans l'approximation numérique des intégrales sur $[-1, 1]$.
 Soit n un entier naturel non nul.

On note $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ les racines de L_n avec $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$.

Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on note $R_k = \prod_{j=1, j \neq k}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$, et $\lambda_k = \int_{-1}^1 R_k(t) dt$.

- En observant que le polynôme $R_k - 1$ est divisible par $x - x_k$, montrer que :
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \int_{-1}^1 R_k(t) dt = \int_{-1}^1 R_k^2(t) dt$.
 En déduire que les coefficients λ_k sont strictement positifs. [S]
- Montrer que pour tout polynôme P de \mathcal{P}_{2n-1} , on a $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k)$.
 (on considèrera la division euclidienne de P par L_n .) [S]
- Soit $\varphi : \mathcal{P}_{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$.
 Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. [S]
- Soit f une application dérivable de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} .
 Montrer qu'il existe un unique polynôme P de \mathcal{P}_{2n-1} tel que :
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$
 Dans la suite de cette partie, ce polynôme sera noté $S(f)$. [S]
- Montrer que $\int_{-1}^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = \int_{-1}^1 (f - S(f))(t) dt$. [S]



6. Soit f une application de classe \mathcal{C}^{2n} de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} .

On note $M_{2n} = \sup\{|f^{(2n)}(x)|, -1 \leq x \leq 1\}$.

Soit t un élément de $[-1, 1]$, n'appartenant pas à l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

On pose $g = f - S(f) - \mu L_n^2$ où le réel μ est choisi de telle sorte que $g(t) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un point c de $[-1, 1]$ tel que $g^{(2n)}(c) = 0$. [S]

(b) En déduire que $\mu = \frac{2^{2n}n!^4}{(2n)!^3} f^{(2n)}(c)$ (utiliser II-2-f). [S]

(c) Montrer que : $\forall t \in [-1, 1], |(f - S(f))(t)| \leq \frac{2^{2n}(n!)^4}{(2n)!^3} M_{2n} L_n^2(t)$. [S]

(d) Conclure que : $\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right| \leq K_n M_{2n}$ avec $K_n = \frac{2^{2n+1}n!^4}{(2n+1)(2n)!^3}$. [S]

(e) Evaluer le coefficient K_n pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$. [S]

(f) Montrer que si $n = 3$ les résultats précédents conduisent à l'approximation :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \frac{1}{9} \left[5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5}) \right]$$

Donner un majorant de l'erreur commise, et préciser pour quels polynômes cette approximation est une égalité. [S]

Corrigé du problème

Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

1. Pour construire une famille ODE de \mathcal{P} , il suffit d'appliquer le procédé d'orthogonalisation Schmidt à la famille $1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$

Ce procédé forme une famille orthonormale (donc orthogonale) de polynômes P_n tels que, en notant p_n la projection orthogonale de \mathcal{P}_n sur \mathcal{P}_{n-1} :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{\|Q_n\|}{Q_n}, \text{ où } Q_n = X^n - p_n(X^n).$$

Ainsi définis, les polynômes P_n sont effectivement de degré n . [Q]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les polynômes P_0, P_1, \dots, P_{n-1} forment une base de \mathcal{P}_{n-1} (c'est une famille à degrés échelonnés.)

Le polynôme P_n est donc orthogonal à P_0, P_1, \dots, P_{n-1} donc à leurs combinaisons linéaires, donc à tout polynôme Q de \mathcal{P}_{n-1} : $\forall Q \in \mathcal{P}_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \langle Q, P_n \rangle = 0$. [Q]

3. – Supposons que pour n de \mathbb{N} , il existe λ_n dans \mathbb{R}^* tel que $Q_n = \lambda_n P_n$.

Alors, pour tout n de \mathbb{N} , on a $\deg Q_n = \deg P_n = n$.

D'autre part, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \neq n$, on a : $\langle Q_m, Q_n \rangle = \lambda_n \lambda_m \langle P_m, P_n \rangle = 0$.

– Réciproquement, on suppose que (Q_n) est une suite ODE ede \mathcal{P} .

Pour tout n de \mathbb{N} , le polynôme Q_n , qui est de degré n , se décompose sur la base P_0, P_1, \dots, P_n de \mathcal{P}_n : $Q_n = \lambda_n P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1} + \dots + \lambda_0 P_0$.

$R_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \dots + \lambda_0 P_0$ est dans \mathcal{P}_{n-1} , donc orthogonal à Q_n et à $\lambda_n P_n$ (cf 2).

Donc R_n est orthogonal à $R_n = Q_n - \lambda_n P_n$. On en déduit $R_n = 0$, puis $Q_n = \lambda_n P_n$ (avec $\lambda_n \neq 0$ car par hypothèse $\deg Q_n = n$.)

[Q]

4. En particulier, si on impose aux polynômes Q_n d'être unitaires, le coefficient λ_n est déterminé de manière unique (comme inverse du coefficient dominant de P_n .)

Il existe donc dans \mathcal{P} une unique famille ODE de polynômes unitaires. [Q]

5. (a) Avec les notations du problème, x_1, \dots, x_p sont p racines distinctes de P_n , qui est de degré n : on a nécessairement $p \leq n$. [Q]

(b) Supposons $p < n$. Le polynôme $P_n Q$ n'admet (éventuellement) dans $]a, b[$ que des racines de multiplicité paire : il a donc un signe constant sur $]a, b[$ et donc sur $[a, b]$.

D'autre part, $\int_{-a}^b P_n Q = \langle P_n, Q \rangle = 0$ car $\deg Q = p < n$.

L'application $x \mapsto (P_n Q)(x)$ est continue sur $[a, b]$, de signe constant, et d'intégrale nulle : c'est donc l'application nulle sur $[a, b]$.

Comme il s'agit d'un polynôme, c'est le polynôme nul : on aboutit à une contradiction car $\deg(P_n Q) = n + p \geq 1$.

On en déduit $p = n$. [Q]