Polynômes orthogonaux (cas "Legendre")

Le problème se compose de trois parties qui ne sont pas indépendantes.

Tous les résultats utiles sont clairement indiqués dans l'énoncé.

Soient a et b deux réels, avec $a < b$. On désigne par $\mathcal{E} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications qui sont définies et continues sur le segment $[a,b]$, et qui sont à valeurs réelles.

$\mathcal{P}$ désigne le sous-espace de $\mathcal{E}$ formé des applications polynômiales, et $\mathcal{P}_n$ est le sous-espace de celles qui sont de degré inférieur ou égal à l'entier naturel n.

On se donne une application ω de $\mathcal{E}$, telle que : $\forall x \in]a,b[, \omega(x) > 0$.

Pour f et g dans $\mathcal{E}$, on note $< f, g > = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x$.

Il est clair qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

On dit qu'une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{P}$ est *orthogonale à degrés échelonnés* (on note *ODE*) si :
- $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \Rightarrow < P_m, P_n > = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$.

1. Rappeler pour quelle raison il est possible de construire de telles suites dans $\mathcal{P}$ [S]
2. Dans le reste de cette partie, on note $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite *ODE* donnée de $\mathcal{P}$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ pour tout Q de $\mathcal{P}_{n-1}$, on a : $< P, Q > = 0$. [S]
3. Montrer qu'une suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{P}$ est *ODE* si et seulement si pour tout entier naturel n, il existe un scalaire λ_n tel que $Q_n = \lambda_n P_n$. [S]
4. En déduire qu'il existe une unique suite *ODE* formée de polynômes unitaires (c'est-à-dire ayant 1 comme coefficient du terme de plus haut degré.) [S]
5. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On veut montrer que les racines de P_n sont toutes réelles, distinctes deux à deux, et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]a,b[$.
   Pour cela, on note $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n qui appartiennent à $]a,b[$ et qui sont de multiplicité impaire. Dans cette notation, $x_1, \ldots, x_m$ sont distinctes deux à deux.
   On note enfin $Q_m = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)$, et on pose $Q = 1$ si $\mathcal{S}$ est vide.
   (a) Montrer que m est inférieur ou égal à n. [S]
   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que m est égal à n. [S]
   (c) Conclure [S]
6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer que les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}, P_{n-1}, XP_{n-1}$ forment une base de $\mathcal{P}_n$.
   On note ainsi $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ les réels tels que : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n X P_{n-1}$. [S]

(b) Montrer que pour tout indice j de $\{0, .., n-3\}$, le coefficient α_j est nul. [S]

(c) En déduire qu'il existe trois suites réelles $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2}$ et $(c_n)_{n\geq 2}$ telles que : $\forall n \geq 2, P_n = (a_n X + b_n)P_{n-1} + c_n P_{n-2}$. [S]

Deuxième Partie : polynômes de Legendre

Dans cette partie, $a = -1$, $b = 1$, et ω est la fonction constante $x \mapsto 1$.

Cette partie est consacrée à l'étude d'une suite orthogonale à degrés étagés particulière.

1. Montrer qu'il existe une unique suite (L_n) de $\mathcal{P}$, *ODE* et telle que pour tout entier n, on ait $L_n(1) = 1$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. [S]
2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n(X) = (x^2-1)^n$.

   (a) Soit f une application de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$.
   Montrer que $< U, f^{(n)} >= (-1)^n < U_n, f >$. [S]

   (b) Montrer que $(U^{(n)})_{n\geq 0}$ est une suite *ODE* de $\mathcal{P}$. [S]

   (c) Calculer la valeur de $U^{(n)}(1)$ (utiliser la formule de Leibniz). [S]

   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(x) = \dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ (Formule de Rodriguès). [S]

   (e) Expliciter le polynôme L_n pour $0 \leq n \leq 4$. [S]

   (f) Montrer que L_n a la parité de n, et que son coefficient dominant vaut $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. [S]

   (g) Si on pose $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \alpha_k x^{n-2k}$, calculer α_k en fonction de n et de k. [S]
3. On reprend ici les notations de la question I-6-c.

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $b_n = 0$ puis $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$. [S]

   (b) Etablir finalement que pour tout $n \geq 2$, $L_n = \dfrac{2n-1}{n}xL_{n-1} - \dfrac{n-1}{n}L_{n-2}$ $\quad(\mathrm{E}_1)$. [S]
4. (a) Utiliser la relation précédente pour montrer successivement que :

      i. $\forall n \geq 2, n < L_n, L_n >= (2n-1) < L_{n-1}, xL_n >$. [S]

      ii. $\forall n \geq 2, (2n-1) < L_{n-2}, xL_{n-1} >= (n-1) < L_{n-2}, L_{n-2} >$. [S]

      iii. $\forall n \geq 2, (2n+1) < L_n, L_n >= (2n-1) < L_{n-1}, L_{n-1} >$. [S]

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $< L_n, L_n >= \dfrac{2}{2n+1}$. [S]
5. En considérant l'égalité $(x^2-1)U'_n = 2nxU_n$, montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}, (x^2-1)L''_n + 2xL' - n(n+1)L_n = 0 \quad (\mathrm{E}_2)$. [S]
6. (a) A partir de $U'_n = 2nxU_{n-1}$ prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, L'_n = xL'_{n-1} + nL_{n-1} \quad (\mathrm{E}_3)$. [S]

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, nL_n = xL_n' - L_{n-1}'$ (E_4).
(indication : dériver (E_1) et combiner le résultat avec (E_3).) [S]

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x^2-1)L_n' = n(xL_n - L_{n-1})$ (E_5). [S]

7. On sait (cf I-5-c) que les tous zéros de L_n (si $n \geq 1$) sont réels distincts, et dans $]-1,1[$.
On veut montrer que pour tout $n \geq 2$, les zéros de L_{n-1} "séparent" les n zéros de L_n.
On note $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ les zéros de L_n.
On note $-1 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < 1$ les zéros de L_{n-1}.
   (a) Pour tout k de $\{1, \ldots .n\}$, montrer que $L_{n-1}(x_k)$ a le signe de $L_n'(x_k)$. [S]
   (b) En déduire que $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, y_k \in]x_k, x_{k+1}[$. [S]

Troisième Partie : quadratures de Gauss

On reprend les notations de la partie II, et notamment les polynômes de Legendre L_n.

On va utiliser ces polynômes dans l'approximation numérique des intégrales sur $[-1,1]$.

Soit n un entier naturel non nul.

On note $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ les racines de L_n avec $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$.

Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on note $R_k = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq k}^{j=n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$, et $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} R_k(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En observant que le polynôme $R_k - 1$ est divisible par $x - x_k$, montrer que :
$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \displaystyle\int_{-1}^{1} R_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} R_k^2(t)\,\mathrm{d}t$.
En déduire que les coefficients λ_k sont strictement positifs. [S]

2. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathcal{P}_{2n-1}$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(x_k)$.
(on considèrera la division euclidienne de P par L_n.) [S]

3. Soit $\varphi : \mathcal{P}_{2n-1} \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(P) = (P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$.
Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. [S]

4. Soit f une application dérivable de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathcal{P}_{2n-1}$ tel que :
$\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$
Dans la suite de cette partie, ce polynôme sera noté $S(f)$. [S]

5. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = \int_{-1}^{1} (f - S(f))(t)\,\mathrm{d}t$. [S]

6. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{2n}$ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
   On note $M_{2n} = \sup\{|f^{(2n)}(x)|, -1 \le x \le 1\}$.
   Soit t un élément de $[-1,1]$, n'appartenant pas à l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
   On pose $g = f - S(f) - \mu L_n^2$ où le réel μ est choisi de telle sorte que $g(t) = 0$.
   (a) Montrer qu' il existe un point c de $[-1,1]$ tel que $g^{(2n)}(c) = 0$. [S]
   (b) En déduire que $\mu = \dfrac{2^{2n} n!^4}{(2n)!^3} f^{(2n)}(c)$ (utiliser II-2-f). [S]
   (c) Montrer que : $\forall t \in [-1,1],\ |(f - S(f))(t)| \le \dfrac{2^{2n}(n!)^4}{(2n)!^3} M_{2n}\, L_n^2(t)$. [S]
   (d) Conclure que : $\left|\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\right| \le K_n M_{2n}$ avec $K_n = \dfrac{2^{2n+1} n!^4}{(2n+1)(2n)!^3}$. [S]
   (e) Evaluer le coefficient K_n pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$. [S]
   (f) Montrer que si $n = 3$ les résultats précédents conduisent à l'approximation :
   $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})\right]$
   Donner un majorant de l'erreur commise, et préciser pour quels polynômes cette approximation est une égalité. [S]

Corrigé du problème

Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

1. Pour construire une famille ODE de $\mathcal{P}$, il suffit d'appliquer le procédé d'orthogonalisation Schmidt à la famille $1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$

   Ce procédé forme une famille orthonormale (donc orthogonale) de polynômes P_n tels que, en notant p_n la projection orthogonale de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{P}_{n-1}$:
   $$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{\|Q_n\|}{Q_n}, \text{ où } Q_n = X^n - p_n(X^n).$$
   Ainsi définis, les polynômes P_n sont effectivement de degré n. [Q]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ forment une base de $\mathcal{P}_{n-1}$ (c'est une famille à degrés échelonnés.)

   Le polynôme P_n est donc orthogonal à $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ donc à leurs combinaisons linéaires, donc à tout polynôme Q de $\mathcal{P}_{n-1}$: $\forall Q \in \mathcal{P}_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, < Q, P_n >= 0$. [Q]

3. – Supposons que pour n de $\mathbb{N}$, il existe λ_n dans $\mathbb{R}^*$ tel que $Q_n = \lambda_n P_n$.
     Alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\deg Q_n = \deg P_n = n$.
     D'autre part, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m \neq n$, on a : $< Q_m, Q_n >= \lambda_n \lambda_n < P_m, P_n >= 0$.
   – Réciproquement, on suppose que (Q_n) est une suite ODE ede $\mathcal{P}$.
     Pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_n, qui est de degré n, se décompose sur la base $P_0, P_1, \ldots, P_n$ de $\mathcal{P}_n$: $Q_n = \lambda_n P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1} + \cdots + \lambda_0 P_0$.
     $R_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \cdots + \lambda_0 P_0$ est dans $\mathcal{P}_{n-1}$, donc orthogonal à Q_n et à $\lambda_n P_n$ (cf 2).
     Donc R_n est orthogonal à $R_n = Q_n - \lambda_n P_n$. On en déduit $R_n = 0$, puis $Q_n = \lambda_n P_n$ (avec $\lambda_n \neq 0$ car par hypothèse $\deg Q_n = n$.)
     [Q]

4. En particulier, si on impose aux polynômes Q_n d'être unitaires, le coefficient λ_n est déterminé de manière unique (comme inverse du coefficient dominant de P_n.)

   Il existe donc dans $\mathcal{P}$ une unique famille ODE de polynômes unitaires. [Q]

5. (a) Avec les notations du problème, $x_1, \ldots, x_p$ sont p racines distinctes de P_n, qui est de degré n : on a nécessairement $p \leq n$. [Q]

   (b) Supposons $p < n$. Le polynôme $P_n Q$ n'admet (éventuellement) dans $]a, b[$ que des racines de multiplicité paire : il a donc un signe constant sur $]a, b[$ et donc sur $[a, b]$.

   D'autre part, $\displaystyle\int_{-a}^{b} P_n Q =< P_n, Q >= 0$ car $\deg Q = p < n$.

   L'application $x \mapsto (P_n Q)(x)$ est continue sur $[a, b]$, de signe constant, et d'intégrale nulle : c'est donc l'application nulle sur $[a, b]$.

   Comme il s'agit d'un polynôme, c'est le polynôme nul : on aboutit à une contradiction car $\deg(P_n Q) = n + p \geq 1$.

   On en déduit $p = n$. [Q]