

## Polynômes orthogonaux (cas "Legendre")

Le problème se compose de trois parties qui ne sont pas indépendantes.

Tous les résultats utiles sont clairement indiqués dans l'énoncé.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $a < b$ . On désigne par  $\mathcal{E} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des applications qui sont définies et continues sur le segment  $[a, b]$ , et qui sont à valeurs réelles.

$\mathcal{P}$  désigne le sous-espace de  $\mathcal{E}$  formé des applications polynomiales, et  $\mathcal{P}_n$  est le sous-espace de celles qui sont de degré inférieur ou égal à l'entier naturel  $n$ .

On se donne une application  $\omega$  de  $\mathcal{E}$ , telle que :  $\forall x \in ]a, b[, \omega(x) > 0$ .

Pour  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{E}$ , on note  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x) dx$ .

Il est clair qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathcal{E}$ .

### Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

On dit qu'une suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathcal{P}$  est *orthogonale à degrés échelonnés* (on note *ODE*) si :

- $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \Rightarrow \langle P_m, P_n \rangle = 0$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$ .

1. Rappeler pour quelle raison il est possible de construire de telles suites dans  $\mathcal{P}$  [S]
2. Dans le reste de cette partie, on note  $(P_n)_{n \geq 0}$  une suite *ODE* donnée de  $\mathcal{P}$ .  
Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  pour tout  $Q$  de  $\mathcal{P}_{n-1}$ , on a :  $\langle P, Q \rangle = 0$ . [S]
3. Montrer qu'une suite  $(Q_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathcal{P}$  est *ODE* si et seulement si pour tout entier naturel  $n$ , il existe un scalaire  $\lambda_n$  tel que  $Q_n = \lambda_n P_n$ . [S]
4. En déduire qu'il existe une unique suite *ODE* formée de polynômes unitaires (c'est-à-dire ayant 1 comme coefficient du terme de plus haut degré.) [S]
5. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . On veut montrer que les racines de  $P_n$  sont toutes réelles, distinctes deux à deux, et qu'elles appartiennent à l'intervalle  $]a, b[$ .

Pour cela, on note  $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_m\}$  l'ensemble éventuellement vide des racines de  $P_n$  qui appartiennent à  $]a, b[$  et qui sont de multiplicité impaire. Dans cette notation,  $x_1, \dots, x_m$  sont distinctes deux à deux.

On note enfin  $Q_m = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$ , et on pose  $Q = 1$  si  $\mathcal{S}$  est vide.

- (a) Montrer que  $m$  est inférieur ou égal à  $n$ . [S]
  - (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que  $m$  est égal à  $n$ . [S]
  - (c) Conclure [S]
6. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- (a) Montrer que les polynômes  $P_0, P_1, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}, XP_{n-1}$  forment une base de  $\mathcal{P}_n$ .

On note ainsi  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  les réels tels que :  $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n XP_{n-1}$ . [S]



- (b) Montrer que pour tout indice  $j$  de  $\{0, \dots, n-3\}$ , le coefficient  $\alpha_j$  est nul. [S]
- (c) En déduire qu'il existe trois suites réelles  $(a_n)_{n \geq 2}$ ,  $(b_n)_{n \geq 2}$  et  $(c_n)_{n \geq 2}$  telles que :  
 $\forall n \geq 2, P_n = (a_n X + b_n)P_{n-1} + c_n P_{n-2}$ . [S]

## Deuxième Partie : polynômes de Legendre

Dans cette partie,  $a = -1$ ,  $b = 1$ , et  $\omega$  est la fonction constante  $x \mapsto 1$ .

Cette partie est consacrée à l'étude d'une suite orthogonale à degrés étagés particulière.

1. Montrer qu'il existe une unique suite  $(L_n)$  de  $\mathcal{P}$ , ODE et telle que pour tout entier  $n$ , on ait  $L_n(1) = 1$ . Les polynômes  $L_n$  sont appelés *polynômes de Legendre*. [S]
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $U_n(X) = (x^2 - 1)^n$ .
  - (a) Soit  $f$  une application de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^n$ .  
Montrer que  $\langle U, f^{(n)} \rangle = (-1)^n \langle U_n, f \rangle$ . [S]
  - (b) Montrer que  $(U^{(n)})_{n \geq 0}$  est une suite ODE de  $\mathcal{P}$ . [S]
  - (c) Calculer la valeur de  $U^{(n)}(1)$  (utiliser la formule de Leibniz). [S]
  - (d) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  (Formule de Rodriguès). [S]
  - (e) Expliciter le polynôme  $L_n$  pour  $0 \leq n \leq 4$ . [S]
  - (f) Montrer que  $L_n$  a la parité de  $n$ , et que son coefficient dominant vaut  $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ . [S]
  - (g) Si on pose  $L_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \alpha_k x^{n-2k}$ , calculer  $\alpha_k$  en fonction de  $n$  et de  $k$ . [S]
3. On reprend ici les notations de la question I-6-c.
  - (a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $b_n = 0$  puis  $a_n = \frac{2n-1}{n}$ . [S]
  - (b) Etablir finalement que pour tout  $n \geq 2$ ,  $L_n = \frac{2n-1}{n} x L_{n-1} - \frac{n-1}{n} L_{n-2}$  (E<sub>1</sub>). [S]
4. (a) Utiliser la relation précédente pour montrer successivement que :
  - i.  $\forall n \geq 2, n \langle L_n, L_n \rangle = (2n-1) \langle L_{n-1}, x L_n \rangle$ . [S]
  - ii.  $\forall n \geq 2, (2n-1) \langle L_{n-2}, x L_{n-1} \rangle = (n-1) \langle L_{n-2}, L_{n-2} \rangle$ . [S]
  - iii.  $\forall n \geq 2, (2n+1) \langle L_n, L_n \rangle = (2n-1) \langle L_{n-1}, L_{n-1} \rangle$ . [S](b) En déduire que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$ . [S]
5. En considérant l'égalité  $(x^2 - 1)U'_n = 2nxU_n$ , montrer :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, (x^2 - 1)L''_n + 2xL'_n - n(n+1)L_n = 0$  (E<sub>2</sub>). [S]
6. (a) A partir de  $U'_n = 2nxU_{n-1}$  prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, L'_n = xL'_{n-1} + nL_{n-1}$  (E<sub>3</sub>). [S]

- (b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, nL_n = xL'_n - L'_{n-1}$  (E<sub>4</sub>).  
 (indication : dériver (E<sub>1</sub>) et combiner le résultat avec (E<sub>3</sub>.) [S]
- (c) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x^2 - 1)L'_n = n(xL_n - L_{n-1})$  (E<sub>5</sub>). [S]
7. On sait (cf I-5-c) que les tous zéros de  $L_n$  (si  $n \geq 1$ ) sont réels distincts, et dans  $] - 1, 1[$ .  
 On veut montrer que pour tout  $n \geq 2$ , les zéros de  $L_{n-1}$  "séparent" les  $n$  zéros de  $L_n$ .  
 On note  $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$  les zéros de  $L_n$ .  
 On note  $-1 < y_1 < \dots < y_{n-1} < 1$  les zéros de  $L_{n-1}$ .
- (a) Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , montrer que  $L_{n-1}(x_k)$  a le signe de  $L'_n(x_k)$ . [S]  
 (b) En déduire que  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, y_k \in ]x_k, x_{k+1}[$ . [S]

### Troisième Partie : quadratures de Gauss

On reprend les notations de la partie II, et notamment les polynômes de Legendre  $L_n$ .  
 On va utiliser ces polynômes dans l'approximation numérique des intégrales sur  $[-1, 1]$ .  
 Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On note  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  les racines de  $L_n$  avec  $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ .

Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $R_k = \prod_{j=1, j \neq k}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ , et  $\lambda_k = \int_{-1}^1 R_k(t) dt$ .

- En observant que le polynôme  $R_k - 1$  est divisible par  $x - x_k$ , montrer que :  
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \int_{-1}^1 R_k(t) dt = \int_{-1}^1 R_k^2(t) dt$ .  
 En déduire que les coefficients  $\lambda_k$  sont strictement positifs. [S]
- Montrer que pour tout polynôme  $P$  de  $\mathcal{P}_{2n-1}$ , on a  $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(x_k)$ .  
 (on considèrera la division euclidienne de  $P$  par  $L_n$ .) [S]
- Soit  $\varphi : \mathcal{P}_{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $\varphi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$ .  
 Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. [S]
- Soit  $f$  une application dérivable de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathcal{P}_{2n-1}$  tel que :  
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$   
 Dans la suite de cette partie, ce polynôme sera noté  $S(f)$ . [S]
- Montrer que  $\int_{-1}^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = \int_{-1}^1 (f - S(f))(t) dt$ . [S]



6. Soit  $f$  une application de classe  $\mathcal{C}^{2n}$  de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $M_{2n} = \sup\{|f^{(2n)}(x)|, -1 \leq x \leq 1\}$ .

Soit  $t$  un élément de  $[-1, 1]$ , n'appartenant pas à l'ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

On pose  $g = f - S(f) - \mu L_n^2$  où le réel  $\mu$  est choisi de telle sorte que  $g(t) = 0$ .

(a) Montrer qu'il existe un point  $c$  de  $[-1, 1]$  tel que  $g^{(2n)}(c) = 0$ . [S]

(b) En déduire que  $\mu = \frac{2^{2n}n!^4}{(2n)!^3} f^{(2n)}(c)$  (utiliser II-2-f). [S]

(c) Montrer que :  $\forall t \in [-1, 1], |(f - S(f))(t)| \leq \frac{2^{2n}(n!)^4}{(2n)!^3} M_{2n} L_n^2(t)$ . [S]

(d) Conclure que :  $\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right| \leq K_n M_{2n}$  avec  $K_n = \frac{2^{2n+1}n!^4}{(2n+1)(2n)!^3}$ . [S]

(e) Evaluer le coefficient  $K_n$  pour  $n = 3$ ,  $n = 4$  et  $n = 5$ . [S]

(f) Montrer que si  $n = 3$  les résultats précédents conduisent à l'approximation :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \frac{1}{9} \left[ 5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5}) \right]$$

Donner un majorant de l'erreur commise, et préciser pour quels polynômes cette approximation est une égalité. [S]

## Corrigé du problème

### Première Partie : familles de polynômes orthogonaux

1. Pour construire une famille ODE de  $\mathcal{P}$ , il suffit d'appliquer le procédé d'orthogonalisation Schmidt à la famille  $1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$

Ce procédé forme une famille orthonormale (donc orthogonale) de polynômes  $P_n$  tels que, en notant  $p_n$  la projection orthogonale de  $\mathcal{P}_n$  sur  $\mathcal{P}_{n-1}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{\|Q_n\|}{Q_n}, \text{ où } Q_n = X^n - p_n(X^n).$$

Ainsi définis, les polynômes  $P_n$  sont effectivement de degré  $n$ . [Q]

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les polynômes  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  forment une base de  $\mathcal{P}_{n-1}$  (c'est une famille à degrés échelonnés.)

Le polynôme  $P_n$  est donc orthogonal à  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  donc à leurs combinaisons linéaires, donc à tout polynôme  $Q$  de  $\mathcal{P}_{n-1}$  :  $\forall Q \in \mathcal{P}_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \langle Q, P_n \rangle = 0$ . [Q]

3. – Supposons que pour  $n$  de  $\mathbb{N}$ , il existe  $\lambda_n$  dans  $\mathbb{R}^*$  tel que  $Q_n = \lambda_n P_n$ .

Alors, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $\deg Q_n = \deg P_n = n$ .

D'autre part,  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ , avec  $m \neq n$ , on a :  $\langle Q_m, Q_n \rangle = \lambda_n \lambda_m \langle P_m, P_n \rangle = 0$ .

– Réciproquement, on suppose que  $(Q_n)$  est une suite ODE de  $\mathcal{P}$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , le polynôme  $Q_n$ , qui est de degré  $n$ , se décompose sur la base  $P_0, P_1, \dots, P_n$  de  $\mathcal{P}_n$  :  $Q_n = \lambda_n P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1} + \dots + \lambda_0 P_0$ .

$R_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \dots + \lambda_0 P_0$  est dans  $\mathcal{P}_{n-1}$ , donc orthogonal à  $Q_n$  et à  $\lambda_n P_n$  (cf 2).

Donc  $R_n$  est orthogonal à  $R_n = Q_n - \lambda_n P_n$ . On en déduit  $R_n = 0$ , puis  $Q_n = \lambda_n P_n$  (avec  $\lambda_n \neq 0$  car par hypothèse  $\deg Q_n = n$ .)

[Q]

4. En particulier, si on impose aux polynômes  $Q_n$  d'être unitaires, le coefficient  $\lambda_n$  est déterminé de manière unique (comme inverse du coefficient dominant de  $P_n$ .)

Il existe donc dans  $\mathcal{P}$  une unique famille ODE de polynômes unitaires. [Q]

5. (a) Avec les notations du problème,  $x_1, \dots, x_p$  sont  $p$  racines distinctes de  $P_n$ , qui est de degré  $n$  : on a nécessairement  $p \leq n$ . [Q]

(b) Supposons  $p < n$ . Le polynôme  $P_n Q$  n'admet (éventuellement) dans  $]a, b[$  que des racines de multiplicité paire : il a donc un signe constant sur  $]a, b[$  et donc sur  $[a, b]$ .

D'autre part,  $\int_{-a}^b P_n Q = \langle P_n, Q \rangle = 0$  car  $\deg Q = p < n$ .

L'application  $x \mapsto (P_n Q)(x)$  est continue sur  $[a, b]$ , de signe constant, et d'intégrale nulle : c'est donc l'application nulle sur  $[a, b]$ .

Comme il s'agit d'un polynôme, c'est le polynôme nul : on aboutit à une contradiction car  $\deg(P_n Q) = n + p \geq 1$ .

On en déduit  $p = n$ . [Q]