Une méthode de calcul de la somme des $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme $Q_n = \frac{1}{2i}((\mathrm{X}+i)^{n+1} - (\mathrm{X}-i)^{n+1})$.

1. (a) Déterminer le degré de Q_n. [S]

   (b) Montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{N},\ Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \mathrm{C}_{2r+1}^{2p+1} \mathrm{X}^{2r-2p}$. [S]

2. (a) Déterminer les racines de Q_n. Montrer que ces racines sont réelles. [S]

   (b) En déduire la décomposition de Q_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. [S]

   (c) Prouver que : $\forall\, r \in \mathbb{N},\ Q_{2r} = (2r+1) \prod_{k=1}^{r} \left(\mathrm{X}^2 - \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2r+1}\right)$. [S]

   (d) En déduire $\sum_{k=1}^{r} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$, puis $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3}$. [S]

3. (a) Montrer que : $\forall\, x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \operatorname{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$. [S]

   (b) En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2r+1}\right)^2}$, puis la valeur de $\lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$. [S]