Polynômes de Chebyshev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la manière suivante :

$$T_0(\mathrm{X}) = 1, \quad T_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} : \ T_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})$$

Première partie

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5. [S]
2. Montrer que pour tout entier n :
   (a) T_n est de degré n et son terme dominant est $2^{n-1}\mathrm{X}^n$. [S]
   (b) T_n a la parité de n. [S]
   (c) $T_n(1) = 1$. [S]
3. Montrer que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \leq n \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$. [S]
4. Prouver que : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $T_m(T_n(\mathrm{X})) = T_{mn}(\mathrm{X})$.
   En déduire un isomorphisme entre $(\mathbb{N}, \times)$ et $\{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. [S]

Deuxième partie

1. Montrer que : $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ et $T_n(\cosh\alpha) = \cosh(n\alpha)$. [S]
2. Etablir que, pour tout $n \geq 1$, les zéros de T_n sont réels, distincts deux à deux, qu'ils sont dans $]-1,1[$, et qu'ils sont donnés par $\forall\,k = 0,\ldots,n-1\ :\ x_k = \cos\Big(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\Big)$. [S]
3. (a) Montrer que : $\forall\,\alpha \in]0,\pi[$, $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $T_n'(\cos\alpha) = n\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}$. [S]
   (b) En déduire les extrémums de T_n (avec $n \geqslant 2$) et en quels points ils sont atteints. [S]
4. Pour $n \geqslant 1$, décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples. [S]
5. Montrer que : $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $(1-\mathrm{X}^2)T_n'' - \mathrm{X}T_n' + n^2T_n = 0$. [S]

Troisième partie

Dans cette partie, P est un polynôme à coefficients réels de monôme dominant $\lambda\mathrm{X}^n$, avec $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sup\{|P(x)|,\ x \in [-1,1]\} \geq \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$. [S]
2. Plus généralement, montrer que $\forall\,a,b\ :\ \sup\{|P(x)|,\ a \leq x \leq b\} \geq \Big(\dfrac{b-a}{2}\Big)^n \dfrac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
   Indication : Utiliser un changement de variable pour se ramener au segment $[-1,1]$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. On trouve successivement :
   $T_2(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_1(\mathrm{X}) - T_0(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^2 - 1$.
   $T_3(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_2(\mathrm{X}) - T_1(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(2\mathrm{X}^2 - 1) - \mathrm{X} = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$.
   $T_4(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_3(\mathrm{X}) - T_2(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}) - (2\mathrm{X}^2 - 1) = 8\mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^2 + 1$.
   $T_5(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,T_4(\mathrm{X}) - T_3(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(8\mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^2 + 1) - (4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}) = 16\mathrm{X}^5 - 20\mathrm{X}^3 + 5\mathrm{X}$. [Q]

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on va montrer la propriété suivante :
   $\mathcal{P}(n)$: "Il existe U_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $T_n(\mathrm{X}) = 2^{n-1}\mathrm{X}^n + U_n(\mathrm{X})$".
   La propriété est vraie si $n = 1$ et $n = 2$, avec $U_1 = 0$ et $U_2 = -1$.
   On se donne maintenant $n \geqslant 1$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
   Dans ces conditions :
   $$\begin{aligned} T_{n+2}(\mathrm{X}) &= 2\mathrm{X}\,T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}(2^n\mathrm{X}^{n+1} + U_{n+1}(\mathrm{X})) - 2^{n-1}\mathrm{X}^n - U_n(\mathrm{X}) \\ &= 2^{n+1}\mathrm{X}^{n+2} + U_{n+2}(\mathrm{X}) \text{ avec } U_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\,U_{n+1}(\mathrm{X}) - 2^{n-1}\mathrm{X}^n - U_n(\mathrm{X}) \end{aligned}$$
   Puisque $\deg(U_n) \leqslant n-1$ $\deg(U_{n+1}) \leqslant n$, U_{n+2} est bien dans $\mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$.
   Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
   Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de terme dominant $2^{n-1}\mathrm{X}^n$. [Q]

   (b) Il suffit de prouver, pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $T_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n T_n(\mathrm{X})$.
   Elle est vraie si $n = 0$ (car T_0 est pair) et si $n = 1$ (car T_1 est impair).
   On se donne $n \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.
   On en déduit :
   $$\begin{aligned} T_{n+2}(-\mathrm{X}) &= 2(-\mathrm{X})T_{n+1}(-\mathrm{X}) - T_n(-\mathrm{X}) = 2(-\mathrm{X})(-1)^{n+1}T_{n+1}(\mathrm{X}) - (-1)^n T_n(\mathrm{X}) \\ &= (-1)^{n+2}(2\mathrm{X}\,T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(\mathrm{X}) \end{aligned}$$
   Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.
   Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n a la parité de n. [Q]

   (c) La relation $T_{n+2}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}T_{n+1}(\mathrm{X}) - T_n(\mathrm{X})$ donne $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$.
   Or $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1$. [Q]

3. On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : "$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$".
   On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geqslant 0$.
   La propriété $\mathcal{P}(0)$ est évidente (car $T_0 = 1$), et la propriété $\mathcal{P}(1)$ n'est autre que la relation connue entre les polynômes T_{n-1}, T_n et T_{n+1} (car $T_1 = \mathrm{X}$).
   On se donne $m \geqslant 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.
   On a donc les égalités $\begin{cases} (E_0) : 2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_nT_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$ valables pour $n \geqslant m+2$.
   On forme alors $2\mathrm{X}(E_1) - (E_0)$ et on obtient :
   $2T_n(2\mathrm{X}\,T_{m+1} - T_m) = (2\mathrm{X}\,T_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2\mathrm{X}\,T_{n-m-1} - T_{n-m})$, c'est-à-dire
   $2T_nT_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence. [Q]