

Polynômes de Chebyshev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

Première partie

1. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5 . [S]
2. Montrer que pour tout entier n :
 - (a) T_n est de degré n et son terme dominant est $2^{n-1}X^n$. [S]
 - (b) T_n a la parité de n . [S]
 - (c) $T_n(1) = 1$. [S]
3. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$. [S]
4. Prouver que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$.
En déduire un isomorphisme entre (\mathbb{N}, \times) et $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$. [S]

Deuxième partie

1. Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$ et $T_n(\cosh \alpha) = \cosh(n\alpha)$. [S]
2. Etablir que, pour tout $n \geq 1$, les zéros de T_n sont réels, distincts deux à deux, qu'ils sont dans $] -1, 1[$, et qu'ils sont donnés par $\forall k = 0, \dots, n-1 : x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$. [S]
3. (a) Montrer que : $\forall \alpha \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}, T'_n(\cos \alpha) = n \frac{\sin(n\alpha)}{\sin \alpha}$. [S]
(b) En déduire les extrémums de T_n (avec $n \geq 2$) et en quels points ils sont atteints. [S]
4. Pour $n \geq 1$, décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples. [S]
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2T_n = 0$. [S]

Troisième partie

Dans cette partie, P est un polynôme à coefficients réels de monôme dominant λX^n , avec $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sup\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\} \geq \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
Indication : Raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $Q = 2^{n-1}P - \lambda T_n$. [S]
2. Plus généralement, montrer que $\forall a, b : \sup\{|P(x)|, a \leq x \leq b\} \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$
Indication : Utiliser un changement de variable pour se ramener au segment $[-1, 1]$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. On trouve successivement :

$$T_2(X) = 2X T_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1.$$

$$T_3(X) = 2X T_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X.$$

$$T_4(X) = 2X T_3(X) - T_2(X) = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

$$T_5(X) = 2X T_4(X) - T_3(X) = 2X(8X^4 - 8X^2 + 1) - (4X^3 - 3X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X. \quad [Q]$$

2. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on va montrer la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n)$: “Il existe U_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $T_n(X) = 2^{n-1}X^n + U_n(X)$ ”.

La propriété est vraie si $n = 1$ et $n = 2$, avec $U_1 = 0$ et $U_2 = -1$.

On se donne maintenant $n \geq 1$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(X) &= 2X T_{n+1}(X) - T_n(X) = 2X(2^n X^{n+1} + U_{n+1}(X)) - 2^{n-1}X^n - U_n(X) \\ &= 2^{n+1}X^{n+2} + U_{n+2}(X) \text{ avec } U_{n+2}(X) = 2X U_{n+1}(X) - 2^{n-1}X^n - U_n(X) \end{aligned}$$

Puisque $\deg(U_n) \leq n-1$ $\deg(U_{n+1}) \leq n$, U_{n+2} est bien dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout n de \mathbb{N}^* , T_n est de degré n et de terme dominant $2^{n-1}X^n$. [Q]

(b) Il suffit de prouver, pour tout n de \mathbb{N} , la propriété $\mathcal{P}(n) : T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

Elle est vraie si $n = 0$ (car T_0 est pair) et si $n = 1$ (car T_1 est impair).

On se donne $n \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}(2X T_{n+1}(X) - T_n(X)) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(X) \end{aligned}$$

Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout n de \mathbb{N} , le polynôme T_n a la parité de n . [Q]

(c) La relation $T_{n+2}(X) = 2X T_{n+1}(X) - T_n(X)$ donne $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$.

Or $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = 1$. [Q]

3. On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : “ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$ ”.

On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geq 0$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est évidente (car $T_0 = 1$), et la propriété $\mathcal{P}(1)$ n'est autre que la relation connue entre les polynômes T_{n-1} , T_n et T_{n+1} (car $T_1 = X$).

On se donne $m \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

On a donc les égalités $\begin{cases} (E_0) : 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_n T_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$ valables pour $n \geq m+2$.

On forme alors $2X(E_1) - (E_0)$ et on obtient :

$$2T_n(2X T_{m+1} - T_m) = (2X T_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2X T_{n-m-1} - T_{n-m}), \text{ c'est-à-dire}$$

$$2T_n T_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}, \text{ ce qui prouve } \mathcal{P}(m+2) \text{ et achève la récurrence. } [Q]$$