Polynômes dont les zéros vérifient des conditions données

Dans ce problème, on considère des polynômes à coefficients complexes.

Un polynôme est dit *normalisé* si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

1. Un polynôme Q, normalisé de degré 2, s'écrit : $Q(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$.
   On note a et b ses zéros, distincts ou non.
   (a) Calculer $a^2 + b^2$ et $(ab)^2$ en fonction de p et q. [S]
   (b) Déterminer p et q pour que les zéros de Q soient a^2 et b^2. [S]
2. Soit A un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $A(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   Donner la liste des polynômes A tels que $A(\mathrm{X})$ divise $A(\mathrm{X}^2)$. [S]
3. Soit B un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $B(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   (a) Donner la liste des polynômes B tels que $B(\mathrm{X})$ divise $B(\mathrm{X}^3)$. [S]
   (b) Montrer (sans l'aide de cette liste) que si $B(\mathrm{X})$ est l'un de ces polynômes, alors $B(-\mathrm{X})$ en est un aussi. [S]
4. Un polynôme $P(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} + r$, normalisé de degré 3, a pour zéros a, b, c.
   (a) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ en fonction des coefficients p, q, r. [S]
   (b) Déterminer p, q, r pour que les zéros de P soient a^2, b^2 et c^2. [S]
   (c) Donner la liste de ces polynômes P et vérifier que pour chacun d'eux :
   $P(\mathrm{X}^2) = -P(\mathrm{X})P(-\mathrm{X})$. [S]
5. Parmi les polynômes P précédents, on notera F_1 et F_2 les deux polynômes qui ne sont pas à coefficients tous réels.
   (a) Calculer le produit $F_1(\mathrm{X})F_2(\mathrm{X})$. [S]
   (b) Donner, sous forme trigonométrique, les zéros de chacun des polynômes F_1 et F_2. [S]
   (c) Former les polynômes normalisés de degré 3 ayant pour zéros les parties réelles des zéros de F_1 et F_2. [S]
   (d) Former les polynômes normalisés Φ_1 et Φ_2, de degré 3, ayant pour zéros les parties imaginaires des zéros des polynômes F_1 et F_2. [S]
   (e) Former le polynôme H tel que : $H(X) = 64X\Phi_1(X)\Phi_2(X)$. [S]
   (f) Montrer que $\sin 7\theta = -H(\sin\theta)$, $\quad \cos 7\theta = H(\cos\theta)$, $\quad \cosh 7\theta = H(\cosh\theta)$. [S]
6. On définit une relation $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow H(x) = H(y)$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence. [S]
   (b) Décrire la classe d'équivalence de x, quand $|x| > 1$ puis quand $|x| \leqslant 1$ [S]
   (c) On note Γ l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $H(x) = H(y)$.
   Etablir que Γ est la réunion d'une droite et de trois ellipses.
   Construire Γ avec Maple. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Avec les relations coefficients-racines $\begin{cases} a+b=-p \\ ab=q \end{cases}$, on a $\begin{cases} a^2+b^2=p^2-2q \\ (ab)^2=q^2 \end{cases}$ [Q]

   (b) Dire que les zéros de Q sont a^2 et b^2 c'est dire que $Q(X)=(X-a^2)(X-b^2)$.

   Par développement cela équivaut à $\begin{cases} a^2+b^2=a+b \\ (ab)^2=(ab) \end{cases}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} p^2+p-2q=0 \\ q^2=q \end{cases}$

   Celà équivaut à $\begin{cases} p^2+p=p(p+1)=0 \\ q=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p^2+p-2=(p-1)(p+2)=0 \\ q=1 \end{cases}$

   Pour (p,q), on obtient les quatre solutions $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-2,1)$ et $(1,1)$.

   On trouve donc quatre polynômes : $Q=X^2$ (racine double 0), $Q=X^2-X$ (racines 0 et 1), $Q=X^2-2X+1$ (racine double 1) et $Q=X^2+X+1$ (racines j et j^2). [Q]

2. Supposons que $A(X)$ divise $A(X^2)$.

   Il existe donc un polynôme $Q(X)$ (unitaire de degré 2) tel que $A(X^2)=Q(X)A(X)$.

   Si on substitue a et b à X, on trouve $A(a^2)=A(b^2)=0$, donc $\{a^2,b^2\}\subset\{a,b\}$.

   Si $a^2\neq b^2$, ou au contraire si $a=b$, alors l'inclusion précédente est une égalité, et A est l'un des quatre polynômes obtenus en (1c).

   Il reste le cas où $b=-a\neq 0$ qui donne $a^2\in\{a,-a\}$ donc $\{a,b\}=\{-1,1\}$.

   On obtient alors le polynôme $A=(X-1)(X+1)=X^2-1$.

   Réciproquement, on vérifie que les cinq polynômes obtenus conviennent :

   – Si $A(X)=X^2$: $A(X^2)=X^4=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2$.

   – Si $A(X)=X^2-X$: $A(X^2)=X^4-X^2=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2+X$.

   – Si $A(X)=(X-1)^2$: $A(X^2)=(X^2-1)^2=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=(X+1)^2$.

   – Si $A(X)=X^2+X+1$: $A(X^2)=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2-X+1$.

   – Si $A(X)=X^2-1$: $A(X^2)=X^4-1=Q(X)A(X)$, avec $Q(X)=X^2+1$.

   Remarque : dans tous les cas, on constate que $A(X^2)=A(X)A(-X)$.

   Autre méthode :

   La méthode précédente est dans l'esprit de l'énoncé (qui présente A comme le polynôme unitaire de degré 2 ayant pour racines a et b). Il y a cependant une meilleure approche, qui consiste à chercher A sous la forme $A=X^2+pX+q$, et à écrire que la division de $A(X^2)$ par $A(X)$ donne un reste nul.

   On trouve en effet (poser la division, ou demander à Maple) :

   $A(X^2)=Q(X)A(X)+R(X)$, avec $\begin{cases} Q(X)=X^2-pX+p-q+p^2 \\ R(X)=p(2q-p-p^2)X+q(1+q-p-p^2) \end{cases}$

   Ainsi $(A(X)\mid A(X^2))\Leftrightarrow R(X)=0\Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \text{ ou } p+p^2=2q \\ q=0 \text{ ou } p+p^2=q+1 \end{cases}$

   cela équivaut à $\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=0 \\ q=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=-1 \\ q=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=1 \\ q=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=-2 \\ q=1 \end{cases}$

   On retrouve ainsi les cinq polynômes obtenus précédemment (et on note que cette méthode ne nécessite pas de vérification puisqu'on a travaillé par équivalences). [Q]

3. (a) Supposons que $B(X)$ divise $B(X^3)$.

Il existe donc un polynôme $Q(X)$ (unitaire de degré 4) tel que $B(X^3) = Q(X)B(X)$.

Si on substitue a et b à X, on trouve $B(a^3) = B(b^3) = 0$, donc $\{a^3, b^3\} \subset \{a, b\}$.

– Premier cas :

Si $a^3 \neq b^3$, ou au contraire si $a = b$, alors $\{a^3, b^3\} = \{a, b\}$.

Mais résoudre $\{a^3, b^3\} = \{a, b\}$, c'est résoudre (S) $\begin{cases} a^3 + b^3 = a + b \\ (ab)^3 = ab \end{cases}$

Posons encore $p = -(a + b)$ et $q = ab$ (donc $B = X^2 + pX + q$).

On note que $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -p^3 + 3pq$.

Ainsi $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} p^3 - 3pq = p \\ q^3 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \text{ ou } p^2 = 3q + 1 \\ q \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$

Les couples (p, q) solutions forment l'ensemble suivant :

$\{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (-i\sqrt{2}, -1), (i\sqrt{2}, -1), (-1, 0), (1, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$

Cela donne naissance aux polynômes :

$B_1 = X^2 - 1$	$B_2 = X^2$	$B_3 = X^2 + 1$
$B_4 = X^2 - i\sqrt{2}X - 1$	$B_5 = X^2 + i\sqrt{2}X - 1$	$B_6 = X^2 - X$
$B_7 = X^2 + X$	$B_8 = X^2 - 2X + 1$	$B_9 = X^2 + 2X + 1$

– Deuxième cas :

Il reste le cas ($a^3 = b^3$ et $a \neq b$), c'est-à-dire ($b = ja$ ou $b = j^2a$, avec $a \neq 0$).

L'inclusion $\{a^3, b^3\} \subset \{a, b\}$ s'écrit ici $a^3 \in \{a, b\}$.

On cherche les paires $\{a, b\}$ solutions.

L'égalité $a^3 = a$ (donc $a^2 = 1$) conduit à $\{1, j\}, \{1, j^2\}, \{-1, -j\}, \{-1, -j^2\}$.

Les égalités $a^3 = b = ja$ (donc $a^2 = j$ et $b = ja$) conduisent à $\{-j^2, -1\}, \{j^2, 1\}$.

L'égalité $a^3 = b = j^2a$ (donc $a^2 = j^2$ et $b = j^2a$) conduisent à $\{j, 1\}, \{-j, -1\}$.

Finalement, les paires $\{a, b\}$ obtenues sont : $\{1, j\}, \{1, j^2\}, \{-1, -j\}, \{-1, -j^2\}$.

On trouve ainsi quatre polynômes supplémentaires :

$$B_{10} = (X - 1)(X - j) = X^2 + j^2X + j \qquad B_{11} = (X - 1)(X - j^2) = X^2 + jX + j^2$$
$$B_{12} = (X + 1)(X + j) = X^2 - j^2X + j \qquad B_{13} = (X + 1)(X + j^2) = X^2 - jX + j^2$$

Réciproquement, on vérifie que les 13 polynômes obtenus conviennent.

Pour tout k de $\{1, \ldots, 13\}$, on a effectivement $B_k(X^3) = Q_k(X)B_k(X)$ avec :

$$Q_1(X) = X^4 + X^2 + 1 \qquad Q_2(X) = X^4 \qquad Q_3(X) = X^4 - X^2 + 1$$
$$Q_4(X) = X^4 + i\sqrt{2}X^3 - X^2 - i\sqrt{2}X + 1 \qquad Q_5(X) = X^4 - i\sqrt{2}X^3 - X^2 + i\sqrt{2}X + 1$$
$$Q_6(X) = X^4 + X^3 + X^2 \qquad Q_7(X) = X^4 - X^3 + X^2$$
$$Q_8(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \qquad Q_9(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$$
$$Q_{10}(X) = X^4 - j^2X^3 - jX + 1 \qquad Q_{11}(X) = X^4 - jX^3 - j^2X + 1$$
$$Q_{12}(X) = X^4 + j^2X^3 + jX + 1 \qquad Q_{13}(X) = X^4 + jX^3 + j^2X + 1$$

Autre méthode :

Comme dans la question 2, on cherche B sous la forme $B = X^2 + pX + q$, et on écrit que la division de $B(X^3)$ par $B(X)$ donne un reste nul. Mais effectuer cette division “à la main” est plutôt désagréable. Appelons donc Maple à l'aide :

```
> restart: B:=X->X^2+p*X+q: R:=rem(B(X^3),B(X),X,'Q'):
> R:=collect(R,X,factor);
```

$$R := -p\,(-3\,q - 1 + p^2)\,(-q + p^2)\,X - q\,(-1 + q^2 - 3\,qp^2 - p^2 + p^4)$$

```
> Q:=collect(Q,X,factor);
```

$$Q := X^4 - pX^3 + (-q + p^2)\,X^2 - p\,(-1 - 2\,q + p^2)\,X + q^2 - 3\,qp^2 - p^2 + p^4$$

```
> sol:=map(allvalues,solve(coeffs(R,X),p,q));
```

$$\begin{aligned} sol := \ & \{\{q = 0, p = 0\}, \{q = 0, p = 1\}, \{p = -1, q = 0\}, \{p = 0, q = 1\},\\ & \{q = -1, p = 0\}, \{q = 1, p = -2\}, \{q = 1, p = 2\},\\ & \{p = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, q = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\}, \{q = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, p = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\},\\ & \{q = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, p = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\}, \{q = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, p = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\},\\ & \{q = -1, p = i\sqrt{2}\}, \{q = -1, p = -i\sqrt{2}\}\} \end{aligned}$$

```
> for s in sol do
    evalc(subs(s,[B(X),Q])) ; collect(%,X) :
    map(sort,%) ; print(['B'=%[1],'Q'=%[2]]) ;
  end do :
```

$[B = X^2, Q = X^4]$

$[B = X^2 + X, Q = X^4 - X^3 + X^2]$

$[B = X^2 - X, Q = X^4 + X^3 + X^2]$

$[B = X^2 + 1, Q = X^4 - X^2 + 1]$

$[B = X^2 - 1, Q = X^4 + X^2 + 1]$

$[B = X^2 - 2\,X + 1, Q = X^4 + 2\,X^3 + 3\,X^2 + 2\,X + 1]$

$[B = X^2 + 2\,X + 1, Q = X^4 - 2\,X^3 + 3\,X^2 - 2\,X + 1]$

$$[B = X^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$$[B = X^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$$[B = X^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$$[B = X^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, Q = X^4 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X^3 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)X + 1]$$

$[B = X^2 + i\sqrt{2}X - 1, Q = X^4 - i\sqrt{2}X^3 - X^2 + i\sqrt{2}X + 1]$

$[B = X^2 - i\sqrt{2}X - 1, Q = X^4 + i\sqrt{2}X^3 - X^2 - i\sqrt{2}X + 1]$

[Q]