

Polynômes dont les zéros vérifient des conditions données

Dans ce problème, on considère des polynômes à coefficients complexes.

Un polynôme est dit *normalisé* si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

1. Un polynôme Q , normalisé de degré 2, s'écrit : $Q(X) = X^2 + pX + q$.
On note a et b ses zéros, distincts ou non.
 - (a) Calculer $a^2 + b^2$ et $(ab)^2$ en fonction de p et q . [S]
 - (b) Déterminer p et q pour que les zéros de Q soient a^2 et b^2 . [S]
2. Soit A un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $A(X) = (X - a)(X - b)$.
Donner la liste des polynômes A tels que $A(X)$ divise $A(X^2)$. [S]
3. Soit B un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $B(X) = (X - a)(X - b)$.
 - (a) Donner la liste des polynômes B tels que $B(X)$ divise $B(X^3)$. [S]
 - (b) Montrer (sans l'aide de cette liste) que si $B(X)$ est l'un de ces polynômes, alors $B(-X)$ en est un aussi. [S]
4. Un polynôme $P(X) = X^3 + pX^2 + qX + r$, normalisé de degré 3, a pour zéros a, b, c .
 - (a) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ en fonction des coefficients p, q, r . [S]
 - (b) Déterminer p, q, r pour que les zéros de P soient a^2, b^2 et c^2 . [S]
 - (c) Donner la liste de ces polynômes P et vérifier que pour chacun d'eux :
 $P(X^2) = -P(X)P(-X)$. [S]
5. Parmi les polynômes P précédents, on notera F_1 et F_2 les deux polynômes qui ne sont pas à coefficients tous réels.
 - (a) Calculer le produit $F_1(X)F_2(X)$. [S]
 - (b) Donner, sous forme trigonométrique, les zéros de chacun des polynômes F_1 et F_2 . [S]
 - (c) Former les polynômes normalisés de degré 3 ayant pour zéros les parties réelles des zéros de F_1 et F_2 . [S]
 - (d) Former les polynômes normalisés Φ_1 et Φ_2 , de degré 3, ayant pour zéros les parties imaginaires des zéros des polynômes F_1 et F_2 . [S]
 - (e) Former le polynôme H tel que : $H(X) = 64X\Phi_1(X)\Phi_2(X)$. [S]
 - (f) Montrer que $\sin 7\theta = -H(\sin \theta)$, $\cos 7\theta = H(\cos \theta)$, $\cosh 7\theta = H(\cosh \theta)$. [S]
6. On définit une relation \mathcal{S} sur \mathbb{R} en posant : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{S} y \Leftrightarrow H(x) = H(y)$.
 - (a) Vérifier que \mathcal{S} est une relation d'équivalence. [S]
 - (b) Décrire la classe d'équivalence de x , quand $|x| > 1$ puis quand $|x| \leq 1$ [S]
 - (c) On note Γ l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $H(x) = H(y)$.
Établir que Γ est la réunion d'une droite et de trois ellipses.
Construire Γ avec Maple. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Avec les relations coefficients-racines $\begin{cases} a + b = -p \\ ab = q \end{cases}$, on a $\begin{cases} a^2 + b^2 = p^2 - 2q \\ (ab)^2 = q^2 \end{cases}$ [Q]

(b) Dire que les zéros de Q sont a^2 et b^2 c'est dire que $Q(X) = (X - a^2)(X - b^2)$.

Par développement cela équivaut à $\begin{cases} a^2 + b^2 = a + b \\ (ab)^2 = (ab) \end{cases}$ c'est-à-dire à $\begin{cases} p^2 + p - 2q = 0 \\ q^2 = q \end{cases}$

Cela équivaut à $\begin{cases} p^2 + p = p(p + 1) = 0 \\ q = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p^2 + p - 2 = (p - 1)(p + 2) = 0 \\ q = 1 \end{cases}$

Pour (p, q) , on obtient les quatre solutions $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-2, 1)$ et $(1, 1)$.

On trouve donc quatre polynômes : $Q = X^2$ (racine double 0), $Q = X^2 - X$ (racines 0 et 1), $Q = X^2 - 2X + 1$ (racine double 1) et $Q = X^2 + X + 1$ (racines j et j^2). [Q]

2. Supposons que $A(X)$ divise $A(X^2)$.

Il existe donc un polynôme $Q(X)$ (unitaire de degré 2) tel que $A(X^2) = Q(X)A(X)$.

Si on substitue a et b à X , on trouve $A(a^2) = A(b^2) = 0$, donc $\{a^2, b^2\} \subset \{a, b\}$.

Si $a^2 \neq b^2$, ou au contraire si $a = b$, alors l'inclusion précédente est une égalité, et A est l'un des quatre polynômes obtenus en (1c).

Il reste le cas où $b = -a \neq 0$ qui donne $a^2 \in \{a, -a\}$ donc $\{a, b\} = \{-1, 1\}$.

On obtient alors le polynôme $A = (X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$.

Réciproquement, on vérifie que les cinq polynômes obtenus conviennent :

- Si $A(X) = X^2$: $A(X^2) = X^4 = Q(X)A(X)$, avec $Q(X) = X^2$.
- Si $A(X) = X^2 - X$: $A(X^2) = X^4 - X^2 = Q(X)A(X)$, avec $Q(X) = X^2 + X$.
- Si $A(X) = (X - 1)^2$: $A(X^2) = (X^2 - 1)^2 = Q(X)A(X)$, avec $Q(X) = (X + 1)^2$.
- Si $A(X) = X^2 + X + 1$: $A(X^2) = Q(X)A(X)$, avec $Q(X) = X^2 - X + 1$.
- Si $A(X) = X^2 - 1$: $A(X^2) = X^4 - 1 = Q(X)A(X)$, avec $Q(X) = X^2 + 1$.

Remarque : dans tous les cas, on constate que $A(X^2) = A(X)A(-X)$.

Autre méthode :

La méthode précédente est dans l'esprit de l'énoncé (qui présente A comme le polynôme unitaire de degré 2 ayant pour racines a et b). Il y a cependant une meilleure approche, qui consiste à chercher A sous la forme $A = X^2 + pX + q$, et à écrire que la division de $A(X^2)$ par $A(X)$ donne un reste nul.

On trouve en effet (poser la division, ou demander à Maple) :

$$A(X^2) = Q(X)A(X) + R(X), \text{ avec } \begin{cases} Q(X) = X^2 - pX + p - q + p^2 \\ R(X) = p(2q - p - p^2)X + q(1 + q - p - p^2) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (A(X) \mid A(X^2)) \Leftrightarrow R(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \text{ ou } p + p^2 = 2q \\ q = 0 \text{ ou } p + p^2 = q + 1 \end{cases}$$

$$\text{cela équivaut à } \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 0 \\ q = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = -1 \\ q = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = -2 \\ q = 1 \end{cases}$$

On retrouve ainsi les cinq polynômes obtenus précédemment (et on note que cette méthode ne nécessite pas de vérification puisqu'on a travaillé par équivalences). [Q]

3. (a) Supposons que $B(X)$ divise $B(X^3)$.

Il existe donc un polynôme $Q(X)$ (unitaire de degré 4) tel que $B(X^3) = Q(X)B(X)$.

Si on substitue a et b à X , on trouve $B(a^3) = B(b^3) = 0$, donc $\{a^3, b^3\} \subset \{a, b\}$.

– Premier cas :

Si $a^3 \neq b^3$, ou au contraire si $a = b$, alors $\{a^3, b^3\} = \{a, b\}$.

Mais résoudre $\{a^3, b^3\} = \{a, b\}$, c'est résoudre (S) $\begin{cases} a^3 + b^3 = a + b \\ (ab)^3 = ab \end{cases}$

Posons encore $p = -(a + b)$ et $q = ab$ (donc $B = X^2 + pX + q$).

On note que $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -p^3 + 3pq$.

Ainsi (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} p^3 - 3pq = p \\ q^3 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \text{ ou } p^2 = 3q + 1 \\ q \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$

Les couples (p, q) solutions forment l'ensemble suivant :

$\{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (-i\sqrt{2}, -1), (i\sqrt{2}, -1), (-1, 0), (1, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$

Cela donne naissance aux polynômes :

$$\begin{aligned} B_1 &= X^2 - 1 & B_2 &= X^2 & B_3 &= X^2 + 1 \\ B_4 &= X^2 - i\sqrt{2}X - 1 & B_5 &= X^2 + i\sqrt{2}X - 1 & B_6 &= X^2 - X \\ B_7 &= X^2 + X & B_8 &= X^2 - 2X + 1 & B_9 &= X^2 + 2X + 1 \end{aligned}$$

– Deuxième cas :

Il reste le cas ($a^3 = b^3$ et $a \neq b$), c'est-à-dire ($b = ja$ ou $b = j^2a$, avec $a \neq 0$).

L'inclusion $\{a^3, b^3\} \subset \{a, b\}$ s'écrit ici $a^3 \in \{a, b\}$.

On cherche les paires $\{a, b\}$ solutions.

L'égalité $a^3 = a$ (donc $a^2 = 1$) conduit à $\{1, j\}, \{1, j^2\}, \{-1, -j\}, \{-1, -j^2\}$.

Les égalités $a^3 = b = ja$ (donc $a^2 = j$ et $b = ja$) conduisent à $\{-j^2, -1\}, \{j^2, 1\}$.

L'égalité $a^3 = b = j^2a$ (donc $a^2 = j^2$ et $b = j^2a$) conduisent à $\{j, 1\}, \{-j, -1\}$.

Finalement, les paires $\{a, b\}$ obtenues sont : $\{1, j\}, \{1, j^2\}, \{-1, -j\}, \{-1, -j^2\}$.

On trouve ainsi quatre polynômes supplémentaires :

$$\begin{aligned} B_{10} &= (X - 1)(X - j) = X^2 + j^2X + j & B_{11} &= (X - 1)(X - j^2) = X^2 + jX + j^2 \\ B_{12} &= (X + 1)(X + j) = X^2 - j^2X + j & B_{13} &= (X + 1)(X + j^2) = X^2 - jX + j^2 \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que les 13 polynômes obtenus conviennent.

Pour tout k de $\{1, \dots, 13\}$, on a effectivement $B_k(X^3) = Q_k(X)B_k(X)$ avec :

$$\begin{aligned} Q_1(X) &= X^4 + X^2 + 1 & Q_2(X) &= X^4 & Q_3(X) &= X^4 - X^2 + 1 \\ Q_4(X) &= X^4 + i\sqrt{2}X^3 - X^2 - i\sqrt{2}X + 1 & Q_5(X) &= X^4 - i\sqrt{2}X^3 - X^2 + i\sqrt{2}X + 1 \\ Q_6(X) &= X^4 + X^3 + X^2 & Q_7(X) &= X^4 - X^3 + X^2 \\ Q_8(X) &= X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 & Q_9(X) &= X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 \\ Q_{10}(X) &= X^4 - j^2X^3 - jX + 1 & Q_{11}(X) &= X^4 - jX^3 - j^2X + 1 \\ Q_{12}(X) &= X^4 + j^2X^3 + jX + 1 & Q_{13}(X) &= X^4 + jX^3 + j^2X + 1 \end{aligned}$$

Autre méthode :

Comme dans la question 2, on cherche B sous la forme $B = X^2 + pX + q$, et on écrit que la division de $B(X^3)$ par $B(X)$ donne un reste nul. Mais effectuer cette division "à la main" est plutôt désagréable. Appelons donc Maple à l'aide :

```

> restart: B:=X->X^2+p*X+q: R:=rem(B(X^3),B(X),X,'Q'):
> R:=collect(R,X,factor);
      R := -p(-3q - 1 + p^2)(-q + p^2)X - q(-1 + q^2 - 3qp^2 - p^2 + p^4)
> Q:=collect(Q,X,factor);
      Q := X^4 - pX^3 + (-q + p^2)X^2 - p(-1 - 2q + p^2)X + q^2 - 3qp^2 - p^2 + p^4
> sol:=map(allvalues,solve(coeffs(R,X),p,q));
      sol := {{q = 0, p = 0}, {q = 0, p = 1}, {p = -1, q = 0}, {p = 0, q = 1},
              {q = -1, p = 0}, {q = 1, p = -2}, {q = 1, p = 2},
              {p = -1/2 + i*sqrt(3)/2, q = -1/2 - i*sqrt(3)/2}, {q = -1/2 + i*sqrt(3)/2, p = -1/2 - i*sqrt(3)/2},
              {q = -1/2 + i*sqrt(3)/2, p = 1/2 + i*sqrt(3)/2}, {q = -1/2 - i*sqrt(3)/2, p = 1/2 - i*sqrt(3)/2},
              {q = -1, p = i*sqrt(2)}, {q = -1, p = -i*sqrt(2)}}
> for s in sol do
      evalc(subs(s,[B(X),Q])); collect(%,X) :
      map(sort,%); print(['B'=%[1], 'Q'=%[2]]);
end do :
[B = X^2, Q = X^4]
[B = X^2 + X, Q = X^4 - X^3 + X^2]
[B = X^2 - X, Q = X^4 + X^3 + X^2]
[B = X^2 + 1, Q = X^4 - X^2 + 1]
[B = X^2 - 1, Q = X^4 + X^2 + 1]
[B = X^2 - 2X + 1, Q = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1]
[B = X^2 + 2X + 1, Q = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1]
[B = X^2 + (-1/2 + i*sqrt(3)/2)X - 1/2 - i*sqrt(3)/2, Q = X^4 + (1/2 - i*sqrt(3)/2)X^3 + (1/2 + i*sqrt(3)/2)X + 1]
[B = X^2 + (-1/2 - i*sqrt(3)/2)X - 1/2 + i*sqrt(3)/2, Q = X^4 + (1/2 + i*sqrt(3)/2)X^3 + (1/2 - i*sqrt(3)/2)X + 1]
[B = X^2 + (1/2 + i*sqrt(3)/2)X - 1/2 + i*sqrt(3)/2, Q = X^4 + (-1/2 - i*sqrt(3)/2)X^3 + (-1/2 + i*sqrt(3)/2)X + 1]
[B = X^2 + (1/2 - i*sqrt(3)/2)X - 1/2 - i*sqrt(3)/2, Q = X^4 + (-1/2 + i*sqrt(3)/2)X^3 + (-1/2 - i*sqrt(3)/2)X + 1]
[B = X^2 + i*sqrt(2)X - 1, Q = X^4 - i*sqrt(2)X^3 - X^2 + i*sqrt(2)X + 1]
[B = X^2 - i*sqrt(2)X - 1, Q = X^4 + i*sqrt(2)X^3 - X^2 - i*sqrt(2)X + 1]
[Q]
    
```