

Matrices et carrés magiques

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note a_{ij} le coefficient de A en ligne i , colonne j . On note $A = (a_{ij})$.

On note I_n la matrice identité d'ordre n

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour tout couple (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en position (i, j) , qui vaut 1.

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ et tous entiers i, j de $\{1, \dots, n\}$, on note :

$$\varphi_i(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \quad , \quad \psi_j(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \quad , \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad , \quad \delta(A) = \sum_{i=1}^n a_{i, n+1-i}$$

Ainsi : $\begin{cases} \varphi_i(A) \text{ est la somme des coefficients de la } i\text{-ème ligne de } A. \\ \psi_j(A) \text{ est la somme des coefficients de la } j\text{-ème colonne de } A. \\ \text{tr}(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{principale} \text{ de } A \text{ (la trace de } A\text{)}. \\ \delta(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{non principale} \text{ de } A. \end{cases}$

On note \mathcal{P}_n l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \varphi_i(A) = \psi_j(A)$.

Pour toute matrice A de \mathcal{P}_n , on note $\sigma(A)$ la valeur commune des quantités $\varphi_i(A)$ et $\psi_j(A)$.

On note \mathcal{Q}_n le sous-ensemble de \mathcal{P}_n des matrices A qui vérifient en outre $\text{tr}(A) = \delta(A) = \sigma(A)$.

Les matrices de \mathcal{P}_n sont dites *semi-magiques* ; celles de \mathcal{Q}_n sont dites *magiques*.

On dit qu'une matrice magique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un *carré magique* d'ordre n si l'ensemble des coefficients de A est égal à $\{1, 2, \dots, n^2\}$.

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

sont des carrés magiques d'ordres respectifs 3, 4, 5.

Partie I

1. Question préliminaire

Soit \mathcal{E} un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Soit f_1, f_2, \dots, f_p une famille de p formes linéaires indépendantes sur \mathcal{E} , avec $1 \leq p \leq n$.

Soit $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{E}, f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_p(x) = 0\}$.

Montrer que \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de \mathcal{E} .

Indication : compléter la famille f_1, \dots, f_p en une base (f) du dual de \mathcal{E} , puis introduire la base (e) de \mathcal{E} dont (f) est la base duale. [S]

2. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [S]

3. Montrer rapidement que les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ sont liées. [S]

4. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sont libres.

On utilisera les matrices E_{kn} (avec $1 \leq k \leq n$) puis les E_{nk} (avec $1 \leq k \leq n - 1$). [S]

5. Dans cette question, on cherche la dimension de \mathcal{P}_n .

Pour tout i de $\{1, \dots, n - 1\}$, on pose $\Phi_i = \varphi_i - \varphi_n$ et $\Psi_i = \psi_i - \varphi_n$.

(a) Montrer que les formes linéaires $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ sont indépendantes. [S]

(b) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n \Leftrightarrow$ on a les égalités :

$$\Phi_1(A) = \dots = \Phi_{n-1}(A) = \Psi_1(A) = \dots = \Psi_{n-1}(A) = 0. \quad [S]$$

(c) En déduire que \mathcal{P}_n est un sous-espace de dimension $n^2 - 2n + 2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [S]

6. Dans cette question, on cherche la dimension de \mathcal{Q}_n .

On rappelle que l'application $A \rightarrow \sigma(A)$ est la forme linéaire définie sur \mathcal{P}_n par la restriction commune à \mathcal{P}_n de chacune des formes linéaires φ_i et ψ_j .

(a) Identifier les matrices de \mathcal{P}_2 et celle de \mathcal{Q}_2 . [S]

(b) On suppose provisoirement que n est supérieur ou égal à 3.

Soient f, g les formes linéaires sur \mathcal{P}_n définie par : $\forall A \in \mathcal{P}_n \quad \begin{cases} f(A) = \text{tr}(A) - \sigma(A) \\ g(A) = \delta(A) - \sigma(A) \end{cases}$

Montrer que f et g sont indépendantes (indication : utiliser deux matrices A particulières de \mathcal{P}_n telles que $\sigma(A) = 0$.) [S]

(c) Déduire de ce qui précède que \mathcal{Q}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 2n$ si $n \geq 3$, et de dimension 1 si $n = 2$. [S]

Partie II

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ_n = J_nA = \lambda J_n$.
Quelle est alors la signification de λ ? [S]
2. Montrer que \mathcal{P}_n est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En est-il de même de \mathcal{Q}_n ? [S]
3. Montrer que l'application σ est un morphisme d'algèbres de \mathcal{P}_n dans \mathbb{R} . [S]
4. Soit A une matrice de \mathcal{P}_n .
 - (a) On suppose que A est inversible.
Montrer alors que $\sigma(A)$ est non nul, que A^{-1} est dans \mathcal{P}_n et que $\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$. [S]
 - (b) Réciproquement, on suppose seulement que $\sigma(A)$ est non nul.
Peut-on en conclure que A est inversible? [S]
5. Pour $n = 3$ et $n = 4$, trouver une matrice A de \mathcal{Q}_n dont le carré n'est pas dans \mathcal{Q}_n . [S]

Partie III

Dans cette partie, on suppose que n est égal à 3.

1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de \mathcal{Q}_n . On note $\alpha = a_{22}$.
 - (a) Montrer que $\sigma(A) = 3\alpha$. [S]
 - (b) Montrer que $B = A - \alpha J_3 = (b_{ij})$ est un élément de \mathcal{Q}_3 tel que $\sigma(B) = 0$. [S]
 - (c) On note $\beta = b_{11}$ et $\gamma = b_{31}$. Exprimer B en fonction α, β, γ .
Montrer que l'expression de A en fonction de α, β, γ est :

$$A = \begin{pmatrix} \beta + \alpha & -\beta + \gamma + \alpha & -\gamma + \alpha \\ -\beta - \gamma + \alpha & \alpha & \beta + \gamma + \alpha \\ \gamma + \alpha & \beta - \gamma + \alpha & -\beta + \alpha \end{pmatrix}$$
 [S]
 - (d) Réciproquement, vérifier que l'expression précédente de A donne toutes les matrices de l'espace vectoriel \mathcal{Q}_3 .
Retrouver ainsi que \mathcal{Q}_3 est de dimension 3 et en préciser une base. [S]
2. On reprend l'expression générale de la matrice A de \mathcal{Q}_n vue dans la question (1c).
 - (a) Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ sont des entiers relatifs vérifiant les conditions $|\beta + \gamma| \leq \alpha$ et $|\beta - \gamma| \leq \alpha$.
Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N}^* \iff$ ces inégalités sont strictes. [S]
 - (b) Montrer que ces deux conditions sur α, β, γ équivalent à dire que le point $\Omega(\beta, \gamma)$ du plan appartient (respectivement est intérieur) au domaine carré K_α dont les sommets sont les points $(\pm\alpha, 0)$, et $(0, \pm\alpha)$. [S]



- (c) Pour tout entier naturel α , déterminer le nombre de points à coordonnées entières qui appartiennent à la frontière du domaine K_α , puis le nombre de tels points qui appartiennent à K_α (bords compris). [S]
- (d) En déduire que pour tout entier naturel α , il y a :
- $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$ matrices A de \mathcal{Q}_n qui sont à coefficients dans \mathbb{N} .
 - $2\alpha^2 - 2\alpha + 1$ matrices A de \mathcal{Q}_n qui sont à coefficients dans \mathbb{N}^* .
- [S]
3. On se propose de trouver tous les carrés magiques A d'ordre 3.
- (a) Montrer que le coefficient a_{22} est nécessairement égal à 5. [S]
- (b) Montrer qu'à une rotation ou à une symétrie près du tableau A , on peut toujours se ramener à $a_{11} = 1$ ou à $a_{21} = 1$. [S]
- (c) En déduire les 8 carrés magiques d'ordre 3. [S]
4. Calculer les déterminants des matrices A , B et C , utilisées comme exemples dans le préambule du problème. [S]

Corrigé du problème

Partie I

1. D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de trouver des formes linéaires f_{p+1}, \dots, f_n telles que $(f) = f_1, f_2, \dots, f_p, \dots, f_n$ soit une base de \mathcal{E}^* .

(f) est de manière unique la base duale d'une base $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ de \mathcal{E} .

On sait que tout x de \mathcal{E} s'écrit sur cette base en $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, avec $x_i = f_i(x)$.

On en déduit que x est dans \mathcal{H} si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$, c'est-à-dire $\Leftrightarrow x$ est uniquement combinaison linéaire de e_{p+1}, \dots, e_n .

Ainsi $\mathcal{H} = \text{Vect} \{e_{p+1}, \dots, e_n\}$: \mathcal{H} est donc un sous-espace de dimension $n - p$ de \mathcal{E} . [Q]

2. Pour tout couple (k, l) , l'application qui à une matrice $A = (a_{ij})$ associe son coefficient a_{kl} est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est la *forme coordonnée* associée à la matrice E_{kl} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)

Les applications φ_i et ψ_j , qui sont des sommes de telles formes coordonnées, sont donc elles-mêmes des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. [Q]

3. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la quantité $\varphi_1(A) + \varphi_2(A) + \dots + \varphi_n(A)$ représente la somme de tous les coefficients de A .

Il en est de même de $\psi_1(A) + \psi_2(A) + \dots + \psi_n(A)$.

On a donc l'égalité $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n$, ce qui répond à la question. [Q]

4. On se donne des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ tels que $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \psi_j \neq 0$.

Il faut montrer que les λ_i et les μ_j sont nuls.

Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$, et $A = E_{kn}$.

On a $\varphi_k(A) = 1$ et $\varphi_i(A) = 0$ si $i \neq k$. De même, $\psi_j(A) = 0$ si $j \leq n - 1$.

On en déduit $0 = \phi(A) = \lambda_k$. Ainsi les coefficients λ_k sont nuls.

Supposons maintenant $1 \leq k \leq n - 1$ et soit $A = E_{nk}$.

On a $\psi_k(A) = 1$ et $\psi_j(A) = 0$ si $j \neq k$.

On en déduit (sachant que les λ_i sont nuls) : $0 = \phi(A) = \mu_k$. Ainsi les μ_k sont nuls.

Conclusion : les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sont libres. [Q]

5. (a) On se donne les $2n - 2$ scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \Phi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \Psi_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varphi_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \mu_i) \varphi_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \psi_i = 0$$

De la question précédente, il découle que les λ_i et les μ_i sont nuls.

Ainsi les $2n - 2$ formes linéaires $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ sont indépendantes. [Q]