Polynômes de Chebyshev et théorème de Weierstrass

Dans ce problème on se propose d'établir le résultat suivant :

Théorème de Weirstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que : $\forall x \in [a, b],\ |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$

Ainsi toute application continue sur un segment peut être approchée uniformément sur ce segment à moins de ε (où ε est un réel strictement positif quelconque) par un polynôme.

La première partie introduit les polynômes de Chebyshev T_n.

La seconde partie propose une démonstration du théorème de Weierstrass utilisant les T_n.

Partie I. Polynômes de Chebyshev

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul donné.

Pour tout x de $[-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

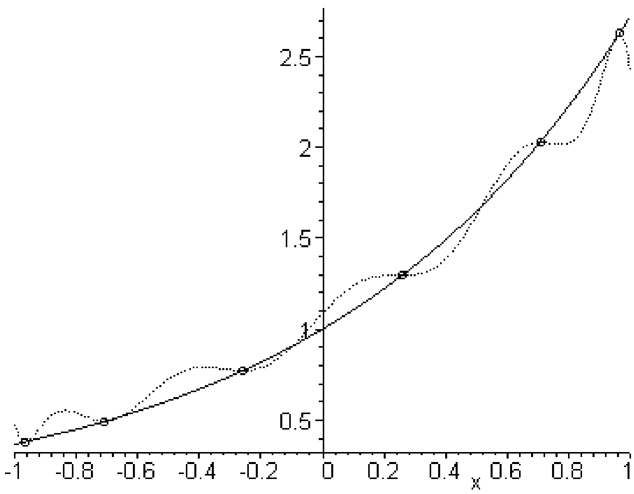
1. (a) Expliciter $T_n(x)$ si $n = 1$ ou $n = 2$. [S]
   (b) Montrer que pour tout x de $[-1, 1]$, on a : $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$. [S]
   (c) Montrer que T_n est un polynôme de degré n.
   Quel est son coefficient dominant ? [S]
2. (a) Montrer que T_n possède n racines distinctes dans $]-1, 1[$, que l'on calculera.
   On notera $a_1, \ldots, a_n$ ces racines, avec $1 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > -1$. [S]
   (b) Avec les notations précédentes, calculer $T'_n(a_k)$ et $T''_n(a_k)$ en fonction de k, n, a_k. [S]
   (c) Pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, on note Q_k le polynôme défini par $T_n(x) = (x - a_k)Q_k(x)$.
   Calculer $Q_k(a_k)$ et $Q'_k(a_k)$ en fonction de k, n, a_k. [S]
3. Soit k un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On rappelle que $\delta_{j\,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme U_k, de degré $2n - 1$, tel que :
   $$\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad U_k(a_j) = \delta_{j\,k} \quad \text{et} \quad U'_k(a_j) = 0.$$
   Montrer plus précisément que ce polynôme est donné par : $U_k = \dfrac{1}{n^2}\,(1 - a_k x)\, Q_k^2$.
   Indication : montrer que U_k, s'il existe, est nécessairement divisible par Q_k^2. [S]
   (b) Montrer que $U_k(x) \geq 0$ sur $[-1, 1]$ et que $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k(x) = 1$. [S]

Partie II. Théorème de Weierstrass

Soit f une application continue sur le segment $[-1,1]$. On pose $M = \sup\limits_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme F_n tel que :
   $\deg F_n \leq 2n-1$ et $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$, $\begin{cases} F_n(a_k) = f(a_k) \\ F_n'(a_k) = 0 \end{cases}$
   Indication : on cherchera à exprimer F_n en fonction des polynômes U_k. [S]
2. Dans cette question, ε est un réel strictement positif donné, et x est fixé dans $[-1,1]$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel strictement positif α tel que :
   $$\forall\,(y,z) \in [-1,1]^2,\ |y-z| \leq \alpha \Rightarrow |f(y)-f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Dans la suite de cette question, on note $J = \{k, 1 \leq k \leq n, |x-a_k| > \alpha\}$. [S]
   (b) Montrer que $|f(x)-F_n(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + 2M\sum\limits_{k\in J} U_k(x)$ (utiliser I.3.b) [S]
   (c) Prouver que $\sum\limits_{k\in J} U_k(x) \leq \dfrac{2}{n\alpha^2}$. [S]
3. (a) En déduire qu'il existe un polynôme P tel que $\forall\, x \in [-1,1]$, $|f(x)-P(x)| \leq \varepsilon$. [S]
   (b) La question précédente établit donc le théorème de Weierstrass sur le segment $[-1,1]$. Prouver que ce résultat s'étend à un segment $[a,b]$ quelconque. [S]
4. Ecrire une procédure Maple, sur le modèle `pol :=proc(f,n)...end` prenant en argument une fonction f et un entier naturel non nul n. Cette procédure doit calculer le polynôme F_n (avec les notations de la question II.1) puis afficher sur $[-1,1]$ la courbe représentative de f, celle de F_n (en pointillés) et l'ensemble des points d'abscisse a_k de ces courbes.
   Voici un exemple d'utilisation, avec $f(x) = \exp(x)$ et $n = 6$:

```
> pol(exp,6) ;
```



[S]