

Deux équations fonctionnelles

Première partie

On appelle \mathcal{F} l'ensemble des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$(1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

Soit f un élément de \mathcal{F} .

1. Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est paire. [S]

2. Soit a un réel fixé. Montrer successivement :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, f(na) = n^2 f(a)$ [S]

(b) $\forall n \in \mathbb{Z}, f(na) = n^2 f(a)$ [S]

(c) $\forall q \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{1}{q^2} f(a)$ [S]

(d) $\forall r \in \mathbb{Q}, f(ra) = r^2 f(a)$ [S]

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, f(xa) = x^2 f(a)$ [S]

3. En déduire : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x^2$. [S]

4. Déterminer \mathcal{F} . [S]

Deuxième partie

On appelle \mathcal{G} l'ensemble des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$(2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y)g(x-y) = (g(x)g(y))^2$$

Soit g un élément de \mathcal{G} .

1. Quelles sont les valeurs possibles de $g(0)$?

Existe-t-il des éléments de \mathcal{G} réalisant ces différentes possibilités ? [S]

2. Montrer que $g(0) = 0 \Leftrightarrow g$ est identiquement nulle. [S]

3. Montrer que s'il existe un réel x de \mathbb{R} tel que $g(x) = 0$, alors g est identiquement nulle.

Indication : Montrer que, pour tout entier n , $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$. [S]

4. En déduire que si g n'est pas identiquement nulle, alors $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ ou $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{-*}$. [S]

5. En utilisant ce qui précède, et la première partie, déterminer \mathcal{G} . [S]

Troisième partie

On appelle \mathcal{H} l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$(3) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, h(x+y) + h(x-y) = 2(h(x) + h(y))$$

$$(4) \quad \exists \alpha > 0, \exists A \geq 0 \quad \text{tel que : } \forall x \in [-\alpha, \alpha], |h(x)| \leq A$$

Soit h un élément de \mathcal{H} .

1. Montrer que, pour tout réel $\beta > 0$, h est bornée sur $[-\beta, \beta]$.

Indication : soit n un entier tel que $\frac{\beta}{2^n} \leq \alpha$.

Utiliser, pour tout réel x , l'égalité $h\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{h(x)}{2^{2n}}$. [S]

2. Démontrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in [-1, 1] \cup [a-1, a+1], |h(x)| \leq M$. [S]
3. Avec les notations précédentes, montrer que

$$\forall (u, n) \in [-1, 1] \times \mathbb{N}, \left| h\left(a + \frac{u}{2^n}\right) - h(a) \right| \leq \frac{3 \cdot 2^n - 1}{4^n} M$$

[S]

4. En déduire que h est continue en a . [S]
5. Déterminer l'ensemble \mathcal{H} . [S]