

Calcul intégral appliqué à une approximation de π^2

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on étudie l'application $x \mapsto f(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout $x > 0$.

1. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $I_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi}{2x}$. [S]
2. (a) Calculer $I_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout réel $x > 0$.
On sera amené à considérer les cas $0 < x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$. [S]
(b) Vérifier que $I_2(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers 0. [S]
3. Montrer que pour tout x de \mathbb{R}^{+*} , on a $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. [S]
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} x I_2(x)$. [S]
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. [S]
5. Dans cette question on établit la dérivabilité de l'application f .

(a) On pose $\Phi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \, du}{x \cos^2 u + \sin^2 u}$ et $\Delta(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-u \cos^2 u \, du}{(x \cos^2 u + \sin^2 u)^2}$.

On se donne un réel $x > 0$, et un réel h tel que $|h| < \frac{x}{2}$.

Pour simplifier les calculs, on pourra poser $a(u) = x \cos^2 u + \sin^2 u$.

Montrer qu'on a la majoration :

$$\left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \Delta(x) \right| \leq |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos^4 u \, du}{\left(\frac{x}{2} \cos^2 u + \sin^2 u\right)^3}$$

En déduire que Φ est dérivable au point x . [S]

- (b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} , avec $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(\sin^2 u - x^2 \cos^2 u)}{(x^2 \cos^2 u + \sin^2 u)^2} \, du$ [S]
- (c) Montrer que : $\forall x > 0$, $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \cos u}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} \, du$. [S]
- (d) Prouver finalement que pour tout $x \neq 1$ on a $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$.

L'application f' est-elle continue en $x = 1$? [S]

6. Dans cette question, on aboutit à une nouvelle expression de l'application f .

- (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} \, dt$ [S]
- (b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on adopte les notations suivantes :

– Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels.

On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite de terme général $S_m = \sum_{n=n_0}^m u_n$ converge.

– On note alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m$ et on dit que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

– On admettra que s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

– Un résultat classique est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans cette partie, on exprime π^2 comme la somme d'une série.

On en déduit une méthode de calcul d'une valeur approchée de π^2 .

1. (a) Pour tout m de \mathbb{N} , montrer que : $f(1) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2} \ln t}{t^2 - 1} dt$. [S]

(b) Prouver qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2m+2} \ln t}{t^2 - 1} dt \leq \frac{K}{2m+2}$.

En déduire l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. [S]

2. (a) Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. [S]

(b) En déduire que $\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$. [S]

3. Dans cette question, on pose $h(t) = \frac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$, $S_p = \sum_{n=1}^p h(n)$ et $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} h(n)$.

Le résultat de la question II-2-b s'écrit donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\pi^2 = 10 - S_p - R_p$.

(a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$ et observer qu'elle est décroissante. [S]

(b) Pour tout entier p dans \mathbb{N}^* , prouver les inégalités : $\int_{p+1}^{+\infty} h(t) dt \leq R_p \leq \int_p^{+\infty} h(t) dt$
[S]

(c) En déduire que pour tout $p \geq 1$, on a : $\frac{1}{6(p+2)^3} \leq R_p \leq \frac{1}{6p^3}$ [S]

(d) On utilise l'approximation $\pi^2 \approx 10 - S_p - \frac{1}{6p^3}$.

Montrer que l'on commet ainsi une erreur par défaut, majorée par $\frac{1}{p^4}$. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. On remarque que $\frac{du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$ est invariant dans $u \mapsto u + \pi$.

Il y a donc “l’invariant de la tangente”, et on effectue le changement de variable $t = \tan u$.

Celui-ci réalise une bijection strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$.

On a $du = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 u = \frac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2 u = \frac{t^2}{1+t^2}$. On en déduit :

$$I_1(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \left[\frac{1}{x} \arctan \frac{t}{x} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

[Q]

2. (a) On remarque que $\frac{\sin u du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u}$ est invariant dans $u \mapsto -u$.

Il y a donc “l’invariant du cosinus”, et on effectue le changement de variable $t = \cos u$.

Celui-ci réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$.

On a $dt = -\sin u du$, $\cos^2 u = t^2$ et $\sin^2 u = 1 - t^2$. On en déduit :

$$I_2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{x^2 \cos^2 u + \sin^2 u} = \int_0^1 \frac{dt}{x^2 t^2 + 1 - t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + (x^2 - 1)t^2}$$

◇ Si $x = 1$, on a bien sûr $I_2(x) = 1$ (évident aussi avec l’expression initiale de I_2 .)

◇ Si $0 < x < 1$, on pose $v = t\sqrt{1-x^2}$. On a $dt = \frac{dv}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\begin{aligned} \text{On en déduit : } I_2(x) &= \int_0^1 \frac{dt}{1 - (1-x^2)t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dv}{1-v^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

◇ Si $x > 1$, on pose $v = t\sqrt{x^2-1}$. On en déduit :

$$I_2(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1 + (x^2-1)t^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \int_0^{\sqrt{x^2-1}} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\arctan \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

[Q]