Calcul intégral appliqué à une approximation de π^2

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on étudie l'application $x \mapsto f(x) = x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout $x > 0$.

1. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $I_1(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi}{2x}$. [S]
2. (a) Calculer $I_2(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout réel $x > 0$.
   On sera amené à considérer les cas $0 < x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$. [S]
   (b) Vérifier que $I_2(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers 0. [S]
3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$. [S]
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités $0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{2} x I_2(x)$. [S]
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. [S]
5. Dans cette question on établit la dérivabilité de l'application f.
   (a) On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x\cos^2 u + \sin^2 u}$ et $\Delta(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2}$.
   On se donne un réel $x > 0$, et un réel h tel que $|h| < \dfrac{x}{2}$.
   Pour simplifier les calculs, on pourra poser $a(u) = x\cos^2 u + \sin^2 u$.
   Montrer qu'on a la majoration :
   $$\left|\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \Delta(x)\right| \le |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$
   En déduire que Φ est dérivable au point x. [S]
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(\sin^2 u - x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u$ [S]
   (c) Montrer que : $\forall x > 0,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u$. [S]
   (d) Prouver finalement que pour tout $x \neq 1$ on a $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.
   L'application f' est-elle continue en $x = 1$? [S]
6. Dans cette question, on aboutit à une nouvelle expression de l'application f.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t$ [S]
   (b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on adopte les notations suivantes :

– Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres réels.
On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite de terme général $S_m = \sum_{n=n_0}^{m} u_n$ converge.

– On note alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{m\to+\infty} S_m$ et on dit que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

– On admettra que s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

– Un résultat classique est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans cette partie, on exprime π^2 comme la somme d'une série.

On en déduit une méthode de calcul d'une valeur approchée de π^2.

1. (a) Pour tout m de $\mathbb{N}$, montrer que : $f(1) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. [S]

   (b) Prouver qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \leq \frac{K}{2m+2}$.

   En déduire l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. [S]

2. (a) Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. [S]

   (b) En déduire que $\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$. [S]

3. Dans cette question, on pose $h(t) = \frac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$, $S_p = \sum_{n=1}^{p} h(n)$ et $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} h(n)$.

   Le résultat de la question II-2-b s'écrit donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \pi^2 = 10 - S_p - R_p$.

   (a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$ et observer qu'elle est décroissante. [S]

   (b) Pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$, prouver les inégalités : $\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \leq R_p \leq \int_p^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ [S]

   (c) En déduire que pour tout $p \geq 1$, on a : $\frac{1}{6(p+2)^3} \leq R_p \leq \frac{1}{6p^3}$ [S]

   (d) On utilise l'approximation $\pi^2 \approx 10 - S_p - \frac{1}{6p^3}$.

   Montrer que l'on commet ainsi une erreur par défaut, majorée par $\frac{1}{p^4}$. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. On remarque que $\dfrac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est invariant dans $u\mapsto u+\pi$.

   Il y a donc "l'invariant de la tangente", et on effectue le changement de variable $t=\tan u$.

   Celui-ci réalise une bijection strictement croissante de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$.

   On a $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos^2 u=\dfrac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2 u=\dfrac{t^2}{1+t^2}$. On en déduit :

$$I_1(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}=\Big[\frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\Big]_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2x}$$

   [Q]

2. (a) On remarque que $\dfrac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est invariant dans $u\mapsto -u$.

   Il y a donc "l'invariant du cosinus", et on effectue le changement de variable $t=\cos u$.

   Celui-ci réalise une bijection strictement décroissante de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

   On a $\mathrm{d}t=-\sin u\,\mathrm{d}u$, $\cos^2 u=t^2$ et $\sin^2 u=1-t^2$. On en déduit :

$$I_2(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{x^2t^2+1-t^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(x^2-1)t^2}$$

   ◇ Si $x=1$, on a bien sûr $I_2(x)=1$ (évident aussi avec l'expression initiale de I_2.)

   ◇ Si $0<x<1$, on pose $v=t\sqrt{1-x^2}$. On a $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\text{On en déduit : } I_2(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-(1-x^2)t^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}v}{1-v^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big[\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

   ◇ Si $x>1$, on pose $v=t\sqrt{x^2-1}$. On en déduit :

$$I_2(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(x^2-1)t^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\sqrt{x^2-1}}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=\frac{\arctan\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

   [Q]