Calcul intégral appliqué à une approximation de π^2

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on étudie l'application $x \mapsto f(x) = x \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout $x > 0$.

1. Pour tout réel $x > 0$, montrer que $I_1(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{\pi}{2x}$. [S]
2. (a) Calculer $I_2(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}$ pour tout réel $x > 0$.
   On sera amené à considérer les cas $0 < x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$. [S]
   (b) Vérifier que $I_2(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers 0. [S]
3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. [S]
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} x I_2(x)$. [S]
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. [S]
5. Dans cette question on établit la dérivabilité de l'application f.
   (a) On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{x\cos^2 u + \sin^2 u}$ et $\Delta(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-u\cos^2 u\,\mathrm{d}u}{(x\cos^2 u + \sin^2 u)^2}$.
   On se donne un réel $x > 0$, et un réel h tel que $|h| < \frac{x}{2}$.
   Pour simplifier les calculs, on pourra poser $a(u) = x\cos^2 u + \sin^2 u$.
   Montrer qu'on a la majoration :
   $$\left|\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \Delta(x)\right| \leq |h| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos^4 u\,\mathrm{d}u}{(\frac{x}{2}\cos^2 u + \sin^2 u)^3}$$
   En déduire que Φ est dérivable au point x. [S]
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u(\sin^2 u - x^2\cos^2 u)}{(x^2\cos^2 u + \sin^2 u)^2}\,\mathrm{d}u$ [S]
   (c) Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\cos u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u}\,\mathrm{d}u$. [S]
   (d) Prouver finalement que pour tout $x \neq 1$ on a $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.
   L'application f' est-elle continue en $x = 1$? [S]
6. Dans cette question, on aboutit à une nouvelle expression de l'application f.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t$ [S]
   (b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on adopte les notations suivantes :

- Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres réels.
  On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite de terme général $S_m = \sum_{n=n_0}^{m} u_n$ converge.
- On note alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{m\to+\infty} S_m$ et on dit que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
- On admettra que s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Un résultat classique est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans cette partie, on exprime π^2 comme la somme d'une série.

On en déduit une méthode de calcul d'une valeur approchée de π^2.

1. (a) Pour tout m de $\mathbb{N}$, montrer que : $f(1) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(2n+1)^2} + \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. [S]

   (b) Prouver qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2m+2}\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \leq \frac{K}{2m+2}$.

   En déduire l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. [S]

2. (a) Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. [S]

   (b) En déduire que $\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(2n+1)^2}$. [S]

3. Dans cette question, on pose $h(t) = \frac{2}{t(t+1)(2t+1)^2}$, $S_p = \sum_{n=1}^{p} h(n)$ et $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} h(n)$.

   Le résultat de la question II-2-b s'écrit donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \pi^2 = 10 - S_p - R_p$.

   (a) Montrer que h est intégrable sur $[1, +\infty[$ et observer qu'elle est décroissante. [S]

   (b) Pour tout entier p dans $\mathbb{N}^*$, prouver les inégalités : $\int_{p+1}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \leq R_p \leq \int_p^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ [S]

   (c) En déduire que pour tout $p \geq 1$, on a : $\frac{1}{6(p+2)^3} \leq R_p \leq \frac{1}{6p^3}$ [S]

   (d) On utilise l'approximation $\pi^2 \approx 10 - S_p - \frac{1}{6p^3}$.

   Montrer que l'on commet ainsi une erreur par défaut, majorée par $\frac{1}{p^4}$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. On remarque que $\dfrac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est invariant dans $u\mapsto u+\pi$.

   Il y a donc "l'invariant de la tangente", et on effectue le changement de variable $t=\tan u$.

   Celui-ci réalise une bijection strictement croissante de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$.

   On a $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos^2 u=\dfrac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2 u=\dfrac{t^2}{1+t^2}$. On en déduit :

$$I_1(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}=\Big[\frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\Big]_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2x}$$

   [Q]

2. (a) On remarque que $\dfrac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}$ est invariant dans $u\mapsto -u$.

   Il y a donc "l'invariant du cosinus", et on effectue le changement de variable $t=\cos u$.

   Celui-ci réalise une bijection strictement décroissante de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

   On a $\mathrm{d}t=-\sin u\,\mathrm{d}u$, $\cos^2 u=t^2$ et $\sin^2 u=1-t^2$. On en déduit :

$$I_2(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,\mathrm{d}u}{x^2\cos^2 u+\sin^2 u}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{x^2t^2+1-t^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(x^2-1)t^2}$$

   ◇ Si $x=1$, on a bien sûr $I_2(x)=1$ (évident aussi avec l'expression initiale de I_2.)

   ◇ Si $0<x<1$, on pose $v=t\sqrt{1-x^2}$. On a $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\begin{aligned}\text{On en déduit : } I_2(x)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-(1-x^2)t^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}v}{1-v^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big[\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

   ◇ Si $x>1$, on pose $v=t\sqrt{x^2-1}$. On en déduit :

$$I_2(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+(x^2-1)t^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\sqrt{x^2-1}}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=\frac{\arctan\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

   [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.