Calcul intégral appliqué à l'étude d'un maximum

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n)a^{-x}$$

L'objet du problème est d'étudier le maximum de la fonction g_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on examine le cas particulier où $n = 1$.

1. (a) Etudier les variations de la fonction $\dfrac{g_1'}{g_1}$.
   On notera u et v les valeurs de x où cette fonction s'annule, avec $u < v$. [S]
   (b) Dresser le tableau de variations de g_1. Etudier la branche infinie du graphe de g_1. [S]
2. Dans cette question, on prend $a = 2$.
   (a) Calculer les valeurs approchées à 10^{-5} près de $u, v, g_1(u), g_1(v)$. [S]
   (b) Construire le graphe de g_1 (unités : $2,5$ cm sur Ox et 10 cm sur Oy). [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On désigne par M le maximum de $|f''(x)|$ sur $[-1, 1]$. Soit β un élément de $\mathbb{R}^+$.

On se propose d'approcher l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ par la somme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)$.

On suppose que $n \geq \beta$. Pour tout nombre entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose :

$$R_1(k,n) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_2(k,n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. (a) En utilisant Taylor-Lagrange montrer que $|R_1(k,n)| \leq \dfrac{A}{n^2}$, avec $A = \dfrac{\beta^2 M}{2}$. [S]
   (b) Montrer également que $|R_2(k,n)| \leq \dfrac{B}{n^3}$, avec $B = \dfrac{M}{6}$. [S]
2. (a) On pose $R_3(k,n) = \displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta - 1/2}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$.
   Prouver l'inégalité $|R_3(k,n)| \leq \dfrac{C}{n^3}$ où $C = A + B + \dfrac{M}{2}\left|\beta - \dfrac{1}{2}\right|$. [S]

(b) On pose $\Delta_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k-\beta}{n}\Big) - \frac{\beta-1/2}{n}(f(1)-f(0))$.

Prouver que $|\Delta_n| \leq \frac{C}{n^2}$. [S]

TROISIÈME PARTIE

On revient à l'étude de la fonction g_n dans le cas général.

1. Pour tout réel $x > n$, calculer $h_n(x) = \dfrac{g_n'(x)}{g_n(x)}$.

   Montrer que sur $]n, +\infty[$, la dérivée de g_n s'annule en un point x_n unique.

   Etudier le signe de $g_n'(x)$ sur $]n, +\infty[$. On pose $M_n = g_n(x_n)$. [S]

2. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

   On considère la fonction f_α définie par $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha-x}$.

   (a) Déterminer en fonction de a la valeur de α pour laquelle on a :

   $$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_\alpha\Big(\frac{k}{n}\Big) - \int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

   Dans toute la suite, on pose $\alpha = \frac{a}{a-1}$. [S]

   (b) Vérifier que $h_n(n\alpha+\beta) = \frac{1}{n\alpha+\beta} - \frac{\beta-1/2}{n}(f_\alpha(1)-f_\alpha(0)) - \Delta_n$,
   où Δ_n a été défini dans la question II-2 (avec ici $f = f_\alpha$.) [S]

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,h_n(n\alpha+\beta) = \frac{\alpha-\beta-1/2}{\alpha(\alpha-1)}$. [S]

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $n\alpha \leq x_n \leq (n+1)\alpha$.

   A cet effet, on étudiera les signes de $h_n(n\alpha)$ et de $h_n((n+1)\alpha)$. [S]

4. (a) On se propose de déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n$, avec $y_n = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=0}^{n}\frac{x_n-k}{n}$.

   Pour celà, on utilisera l'encadrement précédent de x_n ; on utilisera le résultat de la question II-2-b avec $f(x) = \ln(\alpha-x)$, avec $\beta = 0$ puis $\beta = \alpha$.

   On en déduira que la limite cherchée est : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = \int_0^1 \ln(\alpha-x)\,\mathrm{d}x$. [S]

   (b) Calculer cette intégrale. [S]

   (c) Montrer finalement que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sqrt[n]{M_n}$ converge vers $\frac{1}{\mathrm{e}(a-1)}$. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. (a) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $g_1(x) = x(x-1)a^{-x}$.

L'application g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et elle s'annule en 0 et 1.

Sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$: $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \ln a = \dfrac{-x^2\ln a + (2+\ln a)x - 1}{x(x-1)}$

L'application $\dfrac{g_1'}{g_1}$ s'annule en même temps que $P(x) = x^2\ln a - (2+\ln a)x + 1$.

Le discriminant est $\Delta = 4 + \ln^2 a > 0$. Les deux zéros réels et distincts de P sont :

$$u = \frac{2+\ln a - \sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{2+\ln a + \sqrt{4+\ln^2 a}}{2\ln a}$$

On remarque que $u + v = \dfrac{2+\ln a}{\ln a} > 0$ et $uv = \dfrac{1}{\ln a} > 0$, ce qui prouve $0 < u < v$.

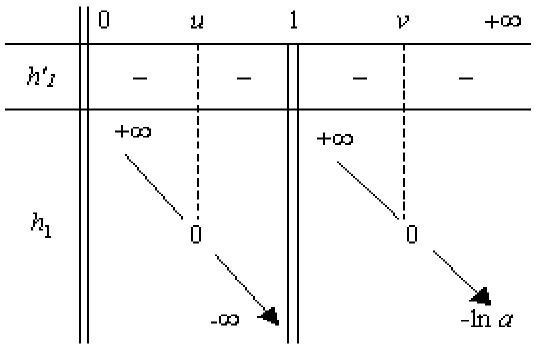
D'autre part, $P(1) = -1 < 0$ ce qui implique $0 < u < 1 < v$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\left(\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)}\right)' = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$.

Voici le tableau de variations de l'application $h_1 = \dfrac{g_1'}{g_1}$:

On trouve facilement

- $\diamond$ $\lim\limits_{0^+} \dfrac{g_1'}{g_1} = +\infty$,
- $\diamond$ $\lim\limits_{1^-} \dfrac{g_1'}{g_1} = -\infty$,
- $\diamond$ $\lim\limits_{1^+} \dfrac{g_1'}{g_1} = +\infty$,
- $\diamond$ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g_1'}{g_1} = -\ln a$.



[Q]

(b) Comme $g_1 < 0$ sur $]0,1[$ et $g_1 > 0$ sur $]1,+\infty[$, la question a) donne le signe de g_1' :

- $\diamond$ L'application g_1' s'annule en u et v.
- $\diamond$ Pour tout x de $]0,u[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) < 0$.
- $\diamond$ Pour tout x de $]u,1[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} < 0$ donc $g_1'(x) > 0$.
- $\diamond$ Pour tout x de $]1,v[$, on a $g_1(x) > 0$ et $\dfrac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) > 0$.