

Calcul intégral appliqué à l'étude d'un maximum

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on note g_n la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$g_n(x) = x(x-1)\cdots(x-n)a^{-x}$$

L'objet du problème est d'étudier le maximum de la fonction g_n sur l'intervalle $[n, +\infty[$.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on examine le cas particulier où $n = 1$.

- (a) Etudier les variations de la fonction $\frac{g_1'}{g_1}$.
On notera u et v les valeurs de x où cette fonction s'annule, avec $u < v$. [S]
(b) Dresser le tableau de variations de g_1 . Etudier la branche infinie du graphe de g_1 . [S]
- Dans cette question, on prend $a = 2$.
 - Calculer les valeurs approchées à 10^{-5} près de $u, v, g_1(u), g_1(v)$. [S]
 - Construire le graphe de g_1 (unités : 2,5 cm sur Ox et 10 cm sur Oy). [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on considère une fonction réelle f de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On désigne par M le maximum de $|f''(x)|$ sur $[-1, 1]$. Soit β un élément de \mathbb{R}^+ .

On se propose d'approcher l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ par la somme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-\beta}{n}\right)$.

On suppose que $n \geq \beta$. Pour tout nombre entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on pose :

$$R_1(k, n) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_2(k, n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

- (a) En utilisant Taylor-Lagrange montrer que $|R_1(k, n)| \leq \frac{A}{n^2}$, avec $A = \frac{\beta^2 M}{2}$. [S]
(b) Montrer également que $|R_2(k, n)| \leq \frac{B}{n^3}$, avec $B = \frac{M}{6}$. [S]
- (a) On pose $R_3(k, n) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta-1/2}{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)$.

Prouver l'inégalité $|R_3(k, n)| \leq \frac{C}{n^3}$ où $C = A + B + \frac{M}{2} \left| \beta - \frac{1}{2} \right|$. [S]

(b) On pose $\Delta_n = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-\beta}{n}\right) - \frac{\beta-1/2}{n}(f(1) - f(0))$.

Prouver que $|\Delta_n| \leq \frac{C}{n^2}$. [S]

TROISIÈME PARTIE

On revient à l'étude de la fonction g_n dans le cas général.

1. Pour tout réel $x > n$, calculer $h_n(x) = \frac{g'_n(x)}{g_n(x)}$.

Montrer que sur $]n, +\infty[$, la dérivée de g_n s'annule en un point x_n unique.

Etudier le signe de $g'_n(x)$ sur $]n, +\infty[$. On pose $M_n = g_n(x_n)$. [S]

2. Soit α un réel strictement supérieur à 1.

On considère la fonction f_α définie par $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha-x}$.

(a) Déterminer en fonction de a la valeur de α pour laquelle on a :

$$h_n(n\alpha) = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f_\alpha(t) dt$$

Dans toute la suite, on pose $\alpha = \frac{a}{a-1}$. [S]

(b) Vérifier que $h_n(n\alpha + \beta) = \frac{1}{n\alpha + \beta} - \frac{\beta-1/2}{n}(f_\alpha(1) - f_\alpha(0)) - \Delta_n$,
où Δ_n a été défini dans la question II-2 (avec ici $f = f_\alpha$). [S]

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n h_n(n\alpha + \beta) = \frac{\alpha-\beta-1/2}{\alpha(\alpha-1)}$. [S]

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $n\alpha \leq x_n \leq (n+1)\alpha$.

A cet effet, on étudiera les signes de $h_n(n\alpha)$ et de $h_n((n+1)\alpha)$. [S]

4. (a) On se propose de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$, avec $y_n = \frac{1}{n} \ln \prod_{k=0}^n \frac{x_n - k}{n}$.

Pour cela, on utilisera l'encadrement précédent de x_n ; on utilisera le résultat de la question II-2-b avec $f(x) = \ln(\alpha - x)$, avec $\beta = 0$ puis $\beta = \alpha$.

On en déduira que la limite cherchée est : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \int_0^1 \ln(\alpha - x) dx$. [S]

(b) Calculer cette intégrale. [S]

(c) Montrer finalement que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sqrt[n]{M_n}$ converge vers $\frac{1}{e^{(a-1)}}$. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. (a) Pour tout x de \mathbb{R}^+ , $g_1(x) = x(x-1)a^{-x}$.

L'application g_1 est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+ et elle s'annule en 0 et 1.

$$\text{Sur } \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\} : \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \ln a = \frac{-x^2 \ln a + (2 + \ln a)x - 1}{x(x-1)}$$

L'application $\frac{g_1'}{g_1}$ s'annule en même temps que $P(x) = x^2 \ln a - (2 + \ln a)x + 1$.

Le discriminant est $\Delta = 4 + \ln^2 a > 0$. Les deux zéros réels et distincts de P sont :

$$u = \frac{2 + \ln a - \sqrt{4 + \ln^2 a}}{2 \ln a} \quad \text{et} \quad v = \frac{2 + \ln a + \sqrt{4 + \ln^2 a}}{2 \ln a}$$

On remarque que $u + v = \frac{2 + \ln a}{\ln a} > 0$ et $uv = \frac{1}{\ln a} > 0$, ce qui prouve $0 < u < v$.

D'autre part, $P(1) = -1 < 0$ ce qui implique $0 < u < 1 < v$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}$, $\left(\frac{g_1'(x)}{g_1(x)}\right)' = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0$.

Voici le tableau de variations de l'application $h_1 = \frac{g_1'}{g_1}$:

On trouve facilement

$$\diamond \lim_{0^+} \frac{g_1'}{g_1} = +\infty,$$

$$\diamond \lim_{1^-} \frac{g_1'}{g_1} = -\infty,$$

$$\diamond \lim_{1^+} \frac{g_1'}{g_1} = +\infty,$$

$$\diamond \lim_{+\infty} \frac{g_1'}{g_1} = -\ln a.$$

	0	u	1	v	$+\infty$
h_1'	-	-	-	-	-
h_1	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$-\ln a$

[Q]

(b) Comme $g_1 < 0$ sur $]0, 1[$ et $g_1 > 0$ sur $]1, +\infty[$, la question a) donne le signe de g_1' :

\diamond L'application g_1' s'annule en u et v .

\diamond Pour tout x de $]0, u[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) < 0$.

\diamond Pour tout x de $]u, 1[$, on a $g_1(x) < 0$ et $\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} < 0$ donc $g_1'(x) > 0$.

\diamond Pour tout x de $]1, v[$, on a $g_1(x) > 0$ et $\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} > 0$ donc $g_1'(x) > 0$.