Ensembles normaux pour une application

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal.

Soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$f(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad \forall\,(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

1. Montrer l'implication : $\forall\,(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$. [S]
2. En déduire : $\forall\,(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. [S]
   On suppose, dans la suite du problème, que f satisfait à la troisième condition :
   $$\forall\,A \in \mathcal{P}(E),\ \text{Card}(f(A)) \geq \text{Card}(A)$$
3. On dit que A est *normal* (sous-entendu pour f) si $\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A)$.
   (a) Montrer que $\emptyset$ et E sont normaux. [S]
   (b) Montrer que si A et B sont normaux, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont normaux. [S]
   (c) Montrer que si A et B sont normaux, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. [S]
4. Parmi tous les sous-ensembles normaux non vides de E, soit A_0 de cardinal minimum.
   (a) Soit A un sous-ensemble normal de E. Montrer que $A \supset A_0$ ou $A \cap A_0 = \emptyset$. [S]
   (b) Soient α un élément de A_0 et β un élément de $f(\{\alpha\})$.
   On pose $E' = E - \{\alpha\}$ et $F' = F - \{\beta\}$.
   On définit une application g de $\mathcal{P}(E')$ dans $\mathcal{P}(F')$ par :
   $$\forall\,C \in \mathcal{P}(E'),\ g(C) = f(C) \cap F'$$
   Montrer que g vérifie les trois conditions analogues à celles de f.
   Indication : pour la troisième condition, on pourra considérer une partie A de E' et discuter suivant que A est ou n'est pas normal pour f. [S]
   (c) En déduire qu'il existe une bijection $\varphi : E \to F$ telle que : $\forall\,x \in E,\ \varphi(x) \in f(\{x\})$.
   Indication : procéder par récurrence sur l'entier $n = \text{Card}\,E = \text{Card}\,F$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.