Ensembles normaux pour une application

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal.

Soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$f(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad \forall\,(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

1. Montrer l'implication : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$. [S]
2. En déduire : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. [S]
   On suppose, dans la suite du problème, que f satisfait à la troisième condition :
   $$\forall\,A \in \mathcal{P}(E),\ \text{Card}(f(A)) \geq \text{Card}(A)$$
3. On dit que A est *normal* (sous-entendu pour f) si $\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A)$.
   (a) Montrer que $\emptyset$ et E sont normaux. [S]
   (b) Montrer que si A et B sont normaux, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont normaux. [S]
   (c) Montrer que si A et B sont normaux, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. [S]
4. Parmi tous les sous-ensembles normaux non vides de E, soit A_0 de cardinal minimum.
   (a) Soit A un sous-ensemble normal de E. Montrer que $A \supset A_0$ ou $A \cap A_0 = \emptyset$. [S]
   (b) Soient α un élément de A_0 et β un élément de $f(\{\alpha\})$.
   On pose $E' = E - \{\alpha\}$ et $F' = F - \{\beta\}$.
   On définit une application g de $\mathcal{P}(E')$ dans $\mathcal{P}(F')$ par :
   $$\forall\,C \in \mathcal{P}(E'),\ g(C) = f(C) \cap F'$$
   Montrer que g vérifie les trois conditions analogues à celles de f.
   Indication : pour la troisième condition, on pourra considérer une partie A de E' et discuter suivant que A est ou n'est pas normal pour f. [S]
   (c) En déduire qu'il existe une bijection $\varphi : E \to F$ telle que : $\forall\,x \in E,\ \varphi(x) \in f(\{x\})$.
   Indication : procéder par récurrence sur l'entier $n = \text{Card}\,E = \text{Card}\,F$. [S]