Pavages et clans

Rappels

Soit E un ensemble, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de E.

On rappelle que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists\, i \in I, x \in A_i\}$ et que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E, \forall\, i \in I, x \in A_i\}$.

Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de E.

– On dit que cette suite est *croissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.

– On dit qu'elle est *décroissante* si : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$.

Première Partie

Soit E un ensemble quelconque. Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que $\mathcal{P}$ est un *pavage* si : $\forall\,(A, B) \in \mathcal{P}^2, \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$

On dit que le pavage $\mathcal{P}$ est *achevé* si :

– Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ croissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.

– Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$, $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n$ est encore un élément de $\mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages achevés de E. [S]
2. Donner tous les pavages de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
3. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble fini.

   Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante (ou décroissante) de parties de E.

   (a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est *stationnaire*.

   Autrement dit, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p,\ A_n = A_p$. [S]

   (b) En déduire que tout pavage de E est achevé. [S]
4. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux pavages de E.

   (a) L'union $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]

   (b) L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]
5. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E.

   (a) Montrer que la famille des pavages achevés de E qui contiennent $\mathcal{P}$ est non vide.

   On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'intersection de tous les pavages de cette famille. [S]

   (b) Montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est lui-même un pavage achevé contenant $\mathcal{P}$. [S]

(c) Réciproquement, montrer que si un pavage achevé contient $\mathcal{P}$, alors il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.

$\widehat{\mathcal{P}}$ est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit pavage achevé contenant $\mathcal{P}$.

On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le pavage achevé *engendré* par $\mathcal{P}$. [S]

(d) A quelle condition a-t-on $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$? [S]

6. Soit $\mathcal{P}$ un pavage de E. On note $\mathcal{P}_m = \{B \subset E, \forall A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}_m$ est un pavage de E qui contient $\mathcal{P}$. [S]
   (b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est achevé, alors $\mathcal{P}_m$ est achevé. [S]

Deuxième Partie

Rappel : on note $\overline{F}$ le complémentaire dans E d'une partie F quelconque de E.

On dit qu'un pavage $\mathcal{P}$ de E est un *clan* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E. [S]
2. Donner tous les clans de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
3. Montrer que si $\mathcal{P}$ est un clan de E alors $\mathcal{P}_m$ est un clan de E. [S]
4. On se donne un clan $\mathcal{P}$ de E. On veut montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan de E.
   (a) Soit A une partie de E. On note $\mathcal{E}_A = \{B \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.

   Montrer que est $\mathcal{E}_A$ est un pavage de E. [S]

   (b) Prouver que le pavage $\mathcal{E}_A$ est achevé. [S]

   (c) En déduire que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{E}_A$. [S]

   (d) Soit B une partie de E. On note $\mathcal{F}_B = \{A \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.

   Montrer que est $\mathcal{F}_B$ est un pavage achevé de E. [S]

   (e) En déduire que si B appartient à $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans $\mathcal{F}_B$. [S]

   (f) Conclure. [S]

Corrigé du problème

Première Partie

1. – Si $\mathcal{P} = \emptyset$, l'assertion $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$ est vraie, tout simplement parce que le prédicat $(A, B) \in \mathcal{P}^2$ est toujours faux (en effet l'ensemble $\mathcal{P}^2$ est vide.)

   Donc $\emptyset$ est un pavage de E.

   – Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, l'assertion $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$ est toujours vraie.

   $\mathcal{P}(E)$ est donc également un pavage de E.

   [Q]

2. – Si $E = \emptyset$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

   Les pavages de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire les deux seules parties de $\mathcal{P}(E)$.

   – Si $E = \{a\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

   Les pavages de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P} = \{\{a\}\}$, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$.

   Autrement dit, les quatres parties possibles de $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages de E.

   – Si $E = \{a, b\}$:

   Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Les pavages de E sont :

$\mathcal{P} = \emptyset$	$\mathcal{P} = \{\emptyset\}$	$\mathcal{P} = \{\{a\}\}$	$\mathcal{P} = \{\{b\}\}$
$\mathcal{P} = \{\{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a, b\}\}$
$\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$	$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$			

   On remarque que les seules parties de $\mathcal{P}(E)$ qui ne sont pas des pavages de E sont :

   $$\{\{a\}, \{b\}\}, \quad \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad \text{et} \quad \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

   [Q]

3. (a) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de parties de E.

   Supposons par l'absurde que cette suite ne soit pas stationnaire.

   En particulier, il existe un entier n_1 tel que $A_0 \subsetneq A_{n_1}$.

   On peut donc choisir un élément a_1 dans $A_{n_1} \setminus A_0$.

   De même, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $A_{n_1} \subsetneq A_{n_2}$.

   On peut alors choisir un élément a_2 dans $A_{n_2} \setminus A_{n_1}$.

   L'étape suivante donne $n_3 > n_2$ tel que $A_{n_2} \subsetneq A_{n_3}$ et un élément a_3 dans $A_{n_3} \setminus A_{n_2}$.

   On peut alors itérer indéfiniment ce procédé et construire une suite strictement croissante $0 < n_1 < n_2 < \cdots$ d'entiers naturels et une suite d'éléments a_k de E distincts deux à deux par construction.