Approximations de π à l'aide de développements limités

Au dix-septième siècle, des mathématiciens comme Huyghens et Snellius entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de π par des méthodes trigonométriques élémentaires. Il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique $\sin x < x < \tan x$ valable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ en introduisant des fonctions :

- Qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles.
- Peu différentes de x au voisinage de 0.

Les fonctions f_1 et f_4 de l'énoncé sont celles de Snellius ; f_2 et f_3 sont celles de Huyghens.

1. Soient a, b des réels positifs ou nuls. On pose $m(a,b) = \frac{2a+b}{3}$ et $g(a,b) = \sqrt[3]{a^2b}$.
   Comparer $m(a,b)$ et $g(a,b)$. [S]
2. Dans toute la suite, on définit les fonctions suivantes sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
   $$f_1(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right)$$
   $$f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \tan x}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{3}\,(2\sin x + \tan x)$$
   Calculer les développements limités en 0 de ces fonctions, à l'ordre 5.
   En déduire l'existence de $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in]0, \eta[,\ f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$. [S]
3. On suppose ici que x appartient à $I =]0, \frac{\pi}{2}[$. Quel est le signe de $f_4(x) - f_3(x)$? [S]
4. On pose $u(x) = 3(2+\cos x)(f_2(x) - f_1(x))$. Linéariser $u(x)$.
   Montrer que $u'(x) = P(\cos\frac{x}{2})$, où P est un polynôme de degré 4. Factoriser P.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $u'(x)$ puis celui de $f_2(x) - f_1(x)$. [S]
5. On pose $v(x) = x - f_2(x)$. Montrer que $v'(x) = Q(\cos\frac{x}{2})$, où Q est un polynôme.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $v'(x)$ puis celui de $v(x)$. [S]
6. On pose $w(x) = f_3(x) - x$. Calculer et factoriser $w'(x)$.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $w(x)$.
   Quelle suite d'inégalités les questions 3 à 6 permettent-elles d'obtenir sur I ? [S]
7. Seules les valeurs des fonctions trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont supposées connues.
   Calculer des expressions simples de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
   Faire de même avec $\sin\frac{\pi}{24}$ à l'aide de radicaux superposés.
   Calculer les expressions par radicaux de $X = 12f_2(\frac{\pi}{12})$ et de $Y = 12f_3(\frac{\pi}{12})$.
   En déduire un encadrement de π. [S]

Corrigé du problème

1. Pour comparer $m(a,b)$ et $g(a,b)$, on factorise $m^3(a,b) - g^3(a,b)$:

$$\begin{aligned} m^3(a,b) - g^3(a,b) &= \frac{1}{27}(8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 - 27a^2b) \\ &= \frac{1}{27}(8a^3 - 15a^2b + 6ab^2 + b^3) = \frac{1}{27}(a-b)^2(8a+b) \end{aligned}$$

Si $a \neq b$, alors $8a + b > 0$. On en déduit $m^3(a,b) > g^3(a,b)$ donc $m(a,b) > g(a,b)$.

Bien sûr, si $a = b$ alors $m(a,b) = g(a,b)$. [Q]

2. Remarque : les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 sont impaires. Les développements limités seront donc de la forme $f_k(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \text{o}(x^5)$.

– Développement limité de f_1 à l'origine :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3\,\frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \text{o}(x^5)}{3 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \text{o}(x^5)} \\ &= \Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \text{o}(x^5)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \text{o}(x^5)\Big)^{-1} \\ &= x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \text{o}(x^4)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} + \text{o}(x^4)\Big) \\ &= x\Big(1 + x^4\Big(\frac{1}{72} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120} + \text{o}(x^4)\Big)\Big) = x\Big(1 - \frac{x^4}{180} + \text{o}(x^4)\Big) \end{aligned}$$

On a donc obtenu : $f_1(x) = x - \dfrac{x^5}{180} + \text{o}(x^5)$.

– Développement limité de f_2 à l'origine :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{3}\Big(8\Big(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3!8} + \frac{x^5}{5!32} + \text{o}(x^5)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \text{o}(x^5)\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(3x - \frac{3}{4}\frac{x^5}{5!} + \text{o}(x^5)\Big) = x - \frac{x^5}{480} + \text{o}(x^5) \end{aligned}$$

– Développement limité de f_3 à l'origine :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sin x(\cos x)^{-1/3} = x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \text{o}(x^4)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \text{o}(x^4)\Big)^{-1/3} \\ &= x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \text{o}(x^4)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + \frac{x^4}{18} + \text{o}(x^4)\Big) \\ &= x\Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \text{o}(x^4)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \text{o}(x^4)\Big) \\ &= x\left(1 + x^4\Big(\frac{1}{24} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120}\Big) + \text{o}(x^4)\right) = x + \frac{x^5}{45} + \text{o}(x^5) \end{aligned}$$