Une équation fonctionnelle

On cherche les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ayant en 0 une dérivée $f'(0) = a > 0$, et telles que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \text{ (avec } xy + 1 \neq 0) : \ f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (1)$$

Dans les questions 1 à 10, on suppose l'existence d'une solution f à ce problème.

1. Montrer que $f(-1) = f(1) = 0$ et $f(0) = 1$. [I] [S]
2. Montrer que f ne s'annule qu'aux points -1 et 1. [I] [S]
3. Montrer que : $\forall\, t \in]-1, 1[\ f(t) > 0$. [I] [S]
4. Soit x_1 un réel distinct de -1, 0, et 1. Soit $M(x_1) = \left|x_1 - \dfrac{1}{x_1}\right| > 0$.
   (a) Montrer que si $|h| < M(x_1)$, alors l'équation $\dfrac{x_1 + y}{1 + x_1 y} = x_1 + h$ (où y est l'inconnue) admet une solution y_h. [I] [S]
   (b) En déduire que f est dérivable en x_1 et que $f'(x_1) = \dfrac{a\, f(x_1)}{1 - x_1^2}$. [I] [S]
5. Montrer que, $\forall\, x \in]-1, 1[$, $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{a/2}$. [I] [S]
6. Montrer que f a un signe constant sur $]1, +\infty[$, et un signe constant sur $]-\infty, -1[$. [I] [S]
7. Montrer que f garde un signe constant ε sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. [I] [S]
8. Montrer que pour tous réels x et y tels que $xy \neq -1$:
   (a) $(|x| < 1$ et $|y| < 1)$ ou $(|x| > 1$ et $|y| > 1) \Rightarrow \left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.
   (b) $(|x| < 1$ et $|y| > 1)$ ou $(|x| > 1$ et $|y| < 1) \Rightarrow \left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| > 1$.
   [I] [S]
9. En déduire que l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall\, x \in [-1, 1],\ g(x) = f(x) \\ \forall\, x \notin [-1, 1],\ g(x) = -f(x) \end{cases}$ est encore une solution du problème (ce qui prouve que ε peut être choisi arbitrairement). [I] [S]
10. On suppose que "$\varepsilon = +$". Montrer que : $\forall\, x \neq 1$, $f(x) = \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|^{a/2}$. [I] [S]
11. Réciproquement, montrer qu'une telle application (en posant en outre $f(1) = 0$), est bien une solution du problème. [I] [S]
12. Donner toutes les solutions du problème. [I] [S]
13. En se limitant à "$\varepsilon = +$", tracer les courbes représentatives correspondant à chacun des cas possibles (trois courbes). [I] [S]

Indications ou résultats

1. Poser pose $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$. [Q]
2. Raisonner par l'absurde. [Q]
3. Poser $y = x$. [Q]
4. (a) On trouve $y_h = \dfrac{h}{1 - x_1^2 - x_1 h}$ [Q]

   (b) Écrire $\dfrac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = f(x_1)\,\dfrac{f(y_h) - 1}{y_h}\,\dfrac{y_h}{h}$ et faire tendre h vers 0. [Q]
5. Intégrer $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ et utiliser $f(0) = 1$. [Q]
6. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, et la question 2. [Q]
7. Dans l'égalité (1), choisir $y = -x$, avec $x > 1$. [Q]
8. Factoriser $1 - \dfrac{x+y}{1+xy}$ et $1 + \dfrac{x+y}{1+xy}$. [Q]
9. Vérifier que pour tous x, y tels que $xy + 1 \neq 0$ on a $g(x)g(y) = g\Big(\dfrac{x+y}{1+xy}\Big)$, en discutant sur la position de $|x|$ et de $|y|$ par rapport à 1. [Q]
10. On intègre $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ et on fait tendre x vers $\pm\infty$. [Q]
11. Vérifier $f\Big(\dfrac{x+y}{1+xy}\Big) = f(x)f(y)$, suivant les valeurs de x et y. [Q]
12. Les questions 9 et 11 montrent qu'il y a deux solutions. [Q]
13. L'étude de la dérivabilité de f en -1 conduit à placer a par rapport à 2. [Q]