



Calcul de $\cos(\pi/5)$ et $\cos(\pi/17)$ à l'aide de radicaux.

PREMIÈRE PARTIE

1. Donner les solutions de (E) : $z^5 - 1 = 0$, sous forme trigonométrique. [S]
2. Soit Q le polynôme tel que $z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$.
Avec le changement de variable $\omega = z + \frac{1}{z}$, exprimer les racines de Q avec des radicaux. [S]
3. En déduire $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{4\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{4\pi}{5}$ et $\sin \frac{\pi}{5}$ à l'aide de radicaux. [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on pose $\theta = \frac{\pi}{17}$.

Tous les calculs demandés doivent être effectués de manière exacte (autrement dit les réponses qui utiliseraient des valeurs approchées fournies par la calculatrice ne sont pas acceptées).

1. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh) \cos(a + (n-1)h)}{\sin h}$ [S]
2. On pose $\begin{cases} x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ x_2 = \cos \theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta \end{cases}$
 - (a) Montrer que $x_1 > 0$. [S]
 - (b) Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$. [S]
 - (c) Développer l'expression $x_1 x_2$, puis linéariser les produits obtenus. [S]
 - (d) En déduire que $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$. [S]
 - (e) Donner une expression de x_1 et de x_2 à l'aide de radicaux. [S]
3. On pose $\begin{cases} y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta, & y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ y_3 = \cos \theta + \cos 13\theta, & y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta \end{cases}$
 - (a) En s'inspirant de la méthode précédente, calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$. [S]
 - (b) En déduire des expressions de y_1, y_2, y_3 et de y_4 à l'aide de radicaux. [S]
4. Donner finalement une expression de $\cos \frac{\pi}{17}$ et de $\cos \frac{2\pi}{17}$ à l'aide de radicaux. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. Les solutions sont les racines cinquièmes de l'unité : $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right)$, $0 \leq k \leq 4$. [Q]

2. Pour tout z de \mathbb{C} , on a $z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$, avec $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

Pour résoudre $Q(z)$ (sachant que $z = 0$ n'est pas solution), on peut poser $Z = z + \frac{1}{z}$.

On a $Z^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$, donc $Q(z) = z^2\left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = z^2(Z^2 + Z - 1)$.

Les solutions de $Z^2 + Z - 1 = 0$ sont $Z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Il faut ensuite résoudre $z + \frac{1}{z} = Z_k$ c'est-à-dire $(E_k) : z^2 - zZ_k + 1 = 0$, pour $k \in \{1, 2\}$.

Le discriminant de (E_k) s'écrit $\Delta_k = Z_k^2 - 4 = -Z_k - 3$ (en utilisant $Z_k^2 = 1 - Z_k$.)

On a ainsi $\Delta_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} < 0$ et $\Delta_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} < 0$.

On en déduit que les solutions de (E_k) sont $z_k = \frac{Z_k - i\sqrt{-\Delta_k}}{2}$ et $z'_k = \frac{Z_k + i\sqrt{-\Delta_k}}{2} = \bar{z}_k$.

On trouve :

$$\diamond z_1 = \frac{Z_1 - i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \frac{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\diamond z'_1 = \frac{Z_1 + i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \bar{z}_1$$

$$\diamond z_2 = \frac{Z_2 - i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\diamond z'_2 = \frac{Z_2 + i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \bar{z}_2$$

Les racines du polynôme $Q(z)$ sont donc z_1, z'_1, z_2, z'_2 .

Elles sont conjuguées deux à deux, et s'expriment à l'aide de radicaux carrés. [Q]

3. Puisque $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \cos \frac{2\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{5} < 1$ et $0 < \sin \frac{\pi}{5} < \sin \frac{2\pi}{5} < 1$.

D'autre part $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$, donc $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}$.

Les solutions de (E) sont : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \exp \frac{2i\pi}{5}$, $\omega_2 = \exp \frac{4i\pi}{5}$, $\omega_3 = \bar{\omega}_2$, $\omega_4 = \bar{\omega}_1$.

ω_1 est la seule solution à avoir une partie réelle et une partie imaginaire positives.

Ainsi $\omega_1 = z'_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ donc $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.