



## Calcul de $\cos(\pi/5)$ et $\cos(\pi/17)$ à l'aide de radicaux.

### PREMIÈRE PARTIE

1. Donner les solutions de (E) :  $z^5 - 1 = 0$ , sous forme trigonométrique. [S]
2. Soit  $Q$  le polynôme tel que  $z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$ .  
Avec le changement de variable  $\omega = z + \frac{1}{z}$ , exprimer les racines de  $Q$  avec des radicaux. [S]
3. En déduire  $\cos \frac{2\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{2\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{4\pi}{5}$  et  $\sin \frac{\pi}{5}$  à l'aide de radicaux. [S]

### DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on pose  $\theta = \frac{\pi}{17}$ .

Tous les calculs demandés doivent être effectués de manière exacte (autrement dit les réponses qui utiliseraient des valeurs approchées fournies par la calculatrice ne sont pas acceptées).

1. Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in ]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh) \cos(a + (n-1)h)}{\sin h}$  [S]
2. On pose  $\begin{cases} x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ x_2 = \cos \theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta \end{cases}$ 
  - (a) Montrer que  $x_1 > 0$ . [S]
  - (b) Montrer que  $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ . [S]
  - (c) Développer l'expression  $x_1 x_2$ , puis linéariser les produits obtenus. [S]
  - (d) En déduire que  $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$ . [S]
  - (e) Donner une expression de  $x_1$  et de  $x_2$  à l'aide de radicaux. [S]
3. On pose  $\begin{cases} y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta, & y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ y_3 = \cos \theta + \cos 13\theta, & y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta \end{cases}$ 
  - (a) En s'inspirant de la méthode précédente, calculer les produits  $y_1 y_2$  et  $y_3 y_4$ . [S]
  - (b) En déduire des expressions de  $y_1, y_2, y_3$  et de  $y_4$  à l'aide de radicaux. [S]
4. Donner finalement une expression de  $\cos \frac{\pi}{17}$  et de  $\cos \frac{2\pi}{17}$  à l'aide de radicaux. [S]

## Corrigé du problème

### PREMIÈRE PARTIE

1. Les solutions sont les racines cinquièmes de l'unité :  $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right)$ ,  $0 \leq k \leq 4$ . [Q]

2. Pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ , on a  $z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$ , avec  $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ .

Pour résoudre  $Q(z)$  (sachant que  $z = 0$  n'est pas solution), on peut poser  $Z = z + \frac{1}{z}$ .

On a  $Z^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$ , donc  $Q(z) = z^2\left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = z^2(Z^2 + Z - 1)$ .

Les solutions de  $Z^2 + Z - 1 = 0$  sont  $Z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  et  $Z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

Il faut ensuite résoudre  $z + \frac{1}{z} = Z_k$  c'est-à-dire  $(E_k) : z^2 - zZ_k + 1 = 0$ , pour  $k \in \{1, 2\}$ .

Le discriminant de  $(E_k)$  s'écrit  $\Delta_k = Z_k^2 - 4 = -Z_k - 3$  (en utilisant  $Z_k^2 = 1 - Z_k$ .)

On a ainsi  $\Delta_1 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} < 0$  et  $\Delta_2 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} < 0$ .

On en déduit que les solutions de  $(E_k)$  sont  $z_k = \frac{Z_k - i\sqrt{-\Delta_k}}{2}$  et  $z'_k = \frac{Z_k + i\sqrt{-\Delta_k}}{2} = \bar{z}_k$ .

On trouve :

$$\diamond z_1 = \frac{Z_1 - i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \frac{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\diamond z'_1 = \frac{Z_1 + i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \bar{z}_1$$

$$\diamond z_2 = \frac{Z_2 - i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\diamond z'_2 = \frac{Z_2 + i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \bar{z}_2$$

Les racines du polynôme  $Q(z)$  sont donc  $z_1, z'_1, z_2, z'_2$ .

Elles sont conjuguées deux à deux, et s'expriment à l'aide de radicaux carrés. [Q]

3. Puisque  $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ , on a  $0 < \cos \frac{2\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{5} < 1$  et  $0 < \sin \frac{\pi}{5} < \sin \frac{2\pi}{5} < 1$ .

D'autre part  $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ , donc  $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$  et  $\sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5}$ .

Les solutions de  $(E)$  sont :  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega_1 = \exp \frac{2i\pi}{5}$ ,  $\omega_2 = \exp \frac{4i\pi}{5}$ ,  $\omega_3 = \bar{\omega}_2$ ,  $\omega_4 = \bar{\omega}_1$ .

$\omega_1$  est la seule solution à avoir une partie réelle et une partie imaginaire positives.

Ainsi  $\omega_1 = z'_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$  donc  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$  et  $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ .