Calcul de $\cos(\pi/5)$ et $\cos(\pi/17)$ à l'aide de radicaux.

PREMIÈRE PARTIE

1. Donner les solutions de (E) : $z^5 - 1 = 0$, sous forme trigonométrique. [S]
2. Soit Q le polynôme tel que $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$.
   Avec le changement de variable $\omega = z + \dfrac{1}{z}$, exprimer les racines de Q avec des radicaux. [S]
3. En déduire $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$, $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5}$ à l'aide de radicaux. [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on pose $\theta = \dfrac{\pi}{17}$.

Tous les calculs demandés doivent être effectués de manière exacte (autrement dit les réponses qui utiliseraient des valeurs approchées fournies par la calculatrice ne sont pas acceptées).

1. Montrer que : $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, h \in]0, \pi[, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{\sin h}$ [S]
2. On pose $\begin{cases} x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ x_2 = \cos \theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta \end{cases}$
   (a) Montrer que $x_1 > 0$. [S]
   (b) Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$. [S]
   (c) Développer l'expression x_1x_2, puis linéariser les produits obtenus. [S]
   (d) En déduire que $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$. [S]
   (e) Donner une expression de x_1 et de x_2 à l'aide de radicaux. [S]
3. On pose $\begin{cases} y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta, & y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ y_3 = \cos\theta + \cos 13\theta, & y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta \end{cases}$
   (a) En s'inspirant de la méthode précédente, calculer les produits y_1y_2 et y_3y_4. [S]
   (b) En déduire des expressions de y_1, y_2, y_3 et de y_4 à l'aide de radicaux. [S]
4. Donner finalement une expression de $\cos\dfrac{\pi}{17}$ et de $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ à l'aide de radicaux. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. Les solutions sont les racines cinquièmes de l'unité : $\omega_k = \exp\Big(\dfrac{2ik\pi}{5}\Big)$, $0 \leqslant k \leqslant 4$. [Q]

2. Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$, avec $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
   Pour résoudre $Q(z)$ (sachant que $z = 0$ n'est pas solution), on peut poser $Z = z + \dfrac{1}{z}$.
   On a $Z^2 = z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2$, donc $Q(z) = z^2\Big(z^2 + z + 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}\Big) = z^2(Z^2 + Z - 1)$.
   Le solutions de $Z^2 + Z - 1 = 0$ sont $Z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
   Il faut ensuite résoudre $z + \dfrac{1}{z} = Z_k$ c'est-à-dire (E_k) : $z^2 - zZ_k + 1 = 0$, pour $k \in \{1,2\}$.
   Le discriminant de (E_k) s'écrit $\Delta_k = Z_k^2 - 4 = -Z_k - 3$ (en utilisant $Z_k^2 = 1 - Z_k$.)
   On a ainsi $\Delta_1 = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\Delta_2 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$.
   On en déduit que les solutions de (E_k) sont $z_k = \dfrac{Z_k - i\sqrt{-\Delta_k}}{2}$ et $z'_k = \dfrac{Z_k + i\sqrt{-\Delta_k}}{2} = \overline{z_k}$.
   On trouve :
   - $\diamond$ $z_1 = \dfrac{Z_1 - i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \dfrac{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{5} - i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
   - $\diamond$ $z'_1 = \dfrac{Z_1 + i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{5} + i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \overline{z_1}$
   - $\diamond$ $z_2 = \dfrac{Z_2 - i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5} - i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
   - $\diamond$ $z'_2 = \dfrac{Z_2 + i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5} + i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \overline{z_2}$

   Les racines du polynôme $Q(z)$ sont donc z_1, z'_1, z_2, z'_2.
   Elles sont conjuguées deux à deux, et s'expriment à l'aide de radicaux carrés. [Q]

3. Puisque $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$, on a $0 < \cos\dfrac{2\pi}{5} < \cos\dfrac{\pi}{5} < 1$ et $0 < \sin\dfrac{\pi}{5} < \sin\dfrac{2\pi}{5} < 1$.
   D'autre part $\dfrac{4\pi}{5} = \pi - \dfrac{\pi}{5}$, donc $\cos\dfrac{4\pi}{5} = -\cos\dfrac{\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5} = \sin\dfrac{\pi}{5}$.
   Les solutions de (E) sont : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \exp\dfrac{2i\pi}{5}$, $\omega_2 = \exp\dfrac{4i\pi}{5}$, $\omega_3 = \overline{\omega_2}$, $\omega_4 = \overline{\omega_1}$.
   ω_1 est la seule solution à avoir une partie réelle et une partie imaginaire positives.
   Ainsi $\omega_1 = z'_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ donc $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.