

## Développantes d'une astroïde

On se place dans le plan euclidien orienté  $\mathbb{R}^2$ .

Pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$ , soit  $\mathcal{C}_m$  l'arc  $t \mapsto M_m(t) = \begin{pmatrix} x_m(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix}$  défini par  $\begin{cases} x_m(t) = \cos^3 t + m \sin t \\ y_m(t) = \sin^3 t + m \cos t \end{cases}$

1. (a) Procéder à une réduction du domaine d'étude pour  $\mathcal{C}_m$ .  
Montrer notamment que  $\mathcal{C}_m$  admet un centre et deux axes de symétrie. [S]
- (b) Montrer que  $\mathcal{C}_{-m}$  est symétrique de  $\mathcal{C}_m$  par rapport à l'axe  $Ox$ . [S]
2. (a) Montrer que  $\mathcal{C}_m$  admet des points stationnaires si et seulement si  $|m| \leq \frac{3}{2}$ .  
Montrer que si  $|m| < \frac{3}{2}$  ce sont des points de rebroussement. Et si  $|m| = \frac{3}{2}$ ?  
Vérifier que  $e_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$  dirige toujours la tangente en  $M_m(t)$  à  $\mathcal{C}_m(t)$ . [S]
- (b) On note  $\Gamma$  l'ensemble des points stationnaires des arcs  $\mathcal{C}_m$ .  
Montrer qu'un paramétrage de  $\Gamma$  est  $t \mapsto M(t) \begin{cases} x(t) = 3 \cos t - 2 \cos^3 t \\ y(t) = 3 \sin t - 2 \sin^3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ . [S]
- (c) Etudier et tracer l'arc  $\Gamma$ .  
Vérifier que la tangente en  $M(t)$  à  $\Gamma$  est toujours dirigée par  $e_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ . [S]
- (d) Soit  $\mathcal{R}$  le repère déduit du repère canonique par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .  
Montrer qu'un paramétrage de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{R}$  est  $\begin{cases} X(u) = 2 \cos^3 u \\ Y(u) = 2 \sin^3 u \end{cases}$  (Any comment ?)  
[S]
- (e) Dans cette question, on suppose que  $|m| \leq \frac{3}{2}$ . Soit  $A$  un point stationnaire de  $\mathcal{C}_m$ .  
Le point  $A$  appartient donc également à la courbe  $\Gamma$ .  
Montrer qu'au point  $A$  les tangentes aux courbes  $\mathcal{C}_m$  et  $\Gamma$  sont orthogonales. [S]
3. (a) Pour quelles valeurs de  $m$  l'arc  $\mathcal{C}_m$  passe-t-il par l'origine ? [S]
- (b) Etudier et tracer la courbe  $\mathcal{C}_{1/2}$ . [S]
4. (a) Ecrire l'équation de la tangente  $\mathcal{D}_m(t)$  au point  $M_m(t)$  de  $\mathcal{C}_m$ . [S]
- (b) Soit  $H_m(t)$  la projection orthogonale de  $O$  sur la droite  $\mathcal{D}_m(t)$ .  
On note  $\mathcal{P}_m$  la trajectoire du point  $H_m(t)$  quand  $M_m(t)$  décrit  $\mathcal{C}_m$ .  
Montrer que  $\mathcal{P}_m$  admet le paramétrage  $\rho = m + \frac{1}{2} \sin 2\theta$  en polaires. [S]
- (c) Etudier et tracer la courbe  $\mathcal{P}_{1/2}$ . [S]
5. Etudier et tracer les courbes  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_{3/4}, \mathcal{C}_{3/2}$ . [S]
6. (a) Soit  $\mathcal{D}(\theta)$  la droite passant par  $O$  et d'angle polaire  $\theta$ .  
Cette droite rencontre (en général)  $\mathcal{D}_m(\theta)$  en un unique point  $N_m(\theta)$ .  
Trouver un paramétrage en polaires de la trajectoire du point  $N_m(\theta)$ . [S]

- (b) Etudier et construire cette trajectoire quand  $m = \frac{1}{2}$ . [S]
7. (a) On fixe le réel  $t$ . Montrer que la tangente  $\Delta(t)$  au point  $M(t)$  de  $\Gamma$  est aussi la normale en  $M_m(t)$  de la courbe  $\mathcal{C}_m$ , et ceci pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$ . [S]
- (b) On oriente  $\Delta(t)$  par le vecteur  $e_2(t)$  (cf question 2c.)  
Pour tous réels  $m$  et  $n$ , préciser la mesure algébrique de  $\overline{M_m(t)M_n(t)}$  sur  $\Delta(t)$ .  
Qu'en déduit-on concernant les courbes  $\mathcal{C}_m$  et  $\mathcal{C}_n$ ? [S]
8. Dans cette question, on suppose  $m > \frac{3}{2}$ .  
D'après la question (2a), la courbe  $\mathcal{C}_m$  ne présente pas de point stationnaire.  
On oriente  $\mathcal{C}_m$  dans le sens des paramètres  $t$  croissants.  
On munit alors  $\mathcal{C}_m$  d'une abscisse curviligne (d'origine quelconque sur cet arc.)
- (a) Calculer la longueur totale de l'arc  $\mathcal{C}_m$ . [S]
- (b) Préciser le repère de Frenet  $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$  au point  $M_m(t)$  de l'arc  $\mathcal{C}_m$ . [S]
- (c) Calculer le rayon de courbure  $R_m(t)$  au point  $M_m(t)$  de  $\mathcal{C}_m$ . [S]
- (d) Préciser les coordonnées du centre de courbure  $\Omega_m(t)$  au point  $M_m(t)$  de  $\mathcal{C}_m$ .  
Quelle est la trajectoire du point  $\Omega_m(t)$  quand  $M_m(t)$  parcourt  $\mathcal{C}_m$ ? [S]
9. Reprendre la question précédente en supposant cette fois  $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$ .  
Pour simplifier les calculs on pourra poser  $m = \frac{3}{2} \sin 2t_0$ , avec  $0 \leq t_0 \leq \frac{\pi}{4}$ .  
On déterminera encore la longueur totale de  $\mathcal{C}_m$  mais pour le calcul de  $\vec{T}, \vec{N}, R, \Omega$  on se placera sur un sous-arc sans point stationnaire (orienté dans le sens des  $t$  croissants.)  
On conviendra qu'en un point stationnaire  $M$  on a  $R = 0$  donc  $\Omega = M$ . [S]

## Corrigé du problème

1. (a) Pour tout réel  $m$ , on définit les applications  $\begin{cases} t \mapsto x_m(t) = \cos^3 t + m \sin t \\ t \mapsto y_m(t) = \sin^3 t + m \cos t \end{cases}$   
 On pose aussi  $M_m(t) = (x_m(t), y_m(t))$ .

◇ Pour tout  $m$  de  $\mathbb{R}$ , les applications  $x_m$  et  $y_m$  sont  $2\pi$ -périodiques.

On peut donc limiter l'étude à  $[t_0, t_0 + 2\pi]$  (et toute la courbe est obtenue.)

◇ Pour tous réels  $m, t$ , on a  $x_m(t + \pi) = -x_m(t)$  et  $y_m(t + \pi) = -y_m(t)$ .

Les points  $M_m(t)$  et  $M_m(t + \pi)$  sont donc symétriques par rapport à l'origine.

On limite alors l'étude à  $[t_0, t_0 + \pi]$ , puis on complète par cette symétrie.

◇ Pour tous réels  $m, t$ , on a  $x_m(\frac{\pi}{2} - t) = y_m(t)$  et  $y_m(\frac{\pi}{2} - t) = x_m(t)$ .

$M_m(t)$  et  $M_m(\frac{\pi}{2} - t)$  sont donc symétriques par rapport à la droite  $y = x$ .

On centre alors  $[t_0, t_0 + \pi]$  en  $\frac{\pi}{4}$ , ce qui donne l'intervalle  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ .

On se limite à la partie gauche de cet intervalle, c'est-à-dire  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ .

On complète alors par la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Finalement, le domaine d'étude est  $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ .

On obtient alors une partie de la courbe  $\mathcal{C}_m$ , à laquelle il suffit d'appliquer la symétrie par rapport à la droite  $y = x$  puis par rapport à l'origine pour obtenir tout  $\mathcal{C}_m$ .

On constate bien que :

◇ L'origine est centre de symétrie de chaque courbe  $\mathcal{C}_m$ .

◇ La droite  $y = x$  (première bissectrice) est axe de symétrie de chaque courbe  $\mathcal{C}_m$ .

◇ La droite  $y = -x$  (seconde bissectrice) est axe de symétrie de chaque courbe  $\mathcal{C}_m$ .

En effet la symétrie par rapport à  $y = -x$  est la composée de la symétrie par rapport à  $y = x$  et de la symétrie par rapport à l'origine.

D'ailleurs pour tous réels  $m, t$ , on a :  $x_m(\frac{3\pi}{2} - t) = -y_m(t)$  et  $y_m(\frac{3\pi}{2} - t) = -x_m(t)$ .

### Remarque :

La réduction de l'étude à  $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  s'applique à toutes les courbes  $\mathcal{C}_m$ .

Mais si  $m = 0$ , alors pour tout réel  $t$  on a  $x_0(-t) = x_0(t)$  et  $y_0(-t) = -y_0(t)$ .

Si  $m = 0$  on se limite à  $[0, \frac{\pi}{4}]$  et on complète par la symétrie par rapport à  $Ox$ .

La courbe  $\mathcal{C}_0$  possède ainsi  $Ox$  et  $Oy$  comme axes de symétrie supplémentaires.

[Q]

(b) Pour tous réels  $m, t$ , on a  $x_m(-t) = x_{-m}(t)$  et  $y_m(-t) = -y_{-m}(t)$ .

Autrement dit,  $M_m(-t)$  et  $M_{-m}(-t)$  sont symétriques par rapport à  $Ox$ .

Quand  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$ , ces points parcourent respectivement  $\mathcal{C}_m$  et  $\mathcal{C}_{-m}$ .

Ces deux courbes sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à  $Ox$ .

Remarque : si  $m = 0$ , on retrouve que  $\mathcal{C}_0$  possède l'axe  $Ox$  comme axe de symétrie.

[Q]

2. (a) Le point  $M_m(t)$  est stationnaire sur  $\mathcal{C}_m$  si et seulement si :

$$\begin{cases} x'_m(t) = 0 \\ y'_m(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \sin t \cos^2 t + m \cos t = 0 \\ 3 \cos t \sin^2 t - m \sin t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - \frac{3}{2} \sin 2t) \cos t = 0 \\ (\frac{3}{2} \sin 2t - m) \sin t = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à  $m = \frac{3}{2} \sin 2t$ , qui n'a de solution en  $t$  que si  $|m| \leq \frac{3}{2}$ .

Ainsi la courbe  $\mathcal{C}_m$  ne possède de point stationnaire que si et seulement si  $|m| \leq \frac{3}{2}$ .

◇ On va maintenant étudier la nature de ces points stationnaires.

On pose  $M'_m(t) = \begin{pmatrix} x'_m(t) \\ y'_m(t) \end{pmatrix}$ ,  $M''_m(t) = \begin{pmatrix} x''_m(t) \\ y''_m(t) \end{pmatrix}$  et enfin  $M'''_m(t) = \begin{pmatrix} x'''_m(t) \\ y'''_m(t) \end{pmatrix}$ .

On voit que  $M'_m(t) = (m - \frac{3}{2} \sin 2t) e_1(t)$ , avec  $e_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ .

NB : En un point non stationnaire,  $e_1(t)$  dirige donc la tangente à  $\mathcal{C}_m$  en  $M_m(t)$ .

Notons  $e_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  : la base mobile  $e_1(t), e_2(t)$  est orthonormale directe.

Pour tout réel  $t$ , on a  $e'_1(t) = -e_2(t)$  et  $e'_2(t) = e_1(t)$ . Ainsi  $e''_1(t) = -e_1(t)$ .

$$\text{On en déduit } \begin{cases} M''_m(t) = -3 \cos 2t e_1(t) - \left(m - \frac{3}{2} \sin 2t\right) e_2(t) \\ M'''_m(t) = \left(\frac{15}{2} \sin 2t - m\right) e_1(t) + 6 \cos 2t e_2(t) \end{cases}$$

◇ Plaçons-nous maintenant en un point  $M_m(t_0)$  stationnaire de  $\mathcal{C}_m$ .

$$\text{En ce point on a } m = \frac{3}{2} \sin 2t_0, \text{ donc : } \begin{cases} M''_m(t_0) = -3 \cos 2t_0 e_1(t_0) \\ M'''_m(t_0) = 6 \sin 2t_0 e_1(t_0) + 6 \cos 2t_0 e_2(t_0) \end{cases}$$

On calcule  $\det(M''_m(t_0), M'''_m(t_0))$  dans la base orthonormée directe  $e_1(t_0), e_2(t_0)$ .

$$\text{On trouve } \det(M''_m(t_0), M'''_m(t_0)) = -18 \cos^2 2t_0 = 18(\sin^2 2t_0 - 1) = 8\left(m^2 - \frac{9}{4}\right)$$

◇ On en déduit que si  $|m| < \frac{3}{2}$ , alors  $M'(t_0) = \vec{0}$  et  $\det(M''_m(t_0), M'''_m(t_0)) \neq 0$ .

Les points stationnaires  $\mathcal{C}_m$  sont donc des rebroussements de première espèce.

NB : en un tel point la tangente est dirigée par  $M''_m(t_0)$  donc par  $e_1(t_0)$ .

◇ Si  $|m| = \frac{3}{2}$ , alors  $|\sin 2t_0| = 1$  donc  $\cos 2t_0 = 0$ .

On a alors  $M_m''(t_0) = \vec{0}$  et  $M_m'''(t_0) = 6 \sin 2t_0 e_1(t_0) = 4m e_1(t_0) = \pm 6e_1(t_0)$ .

On doit maintenant calculer la dérivée quatrième du vecteur  $M_m(t)$ .

En dérivant  $M_m'''(t)$ , on trouve :  $M_m^{(4)}(t) = 21 \cos 2t e_1(t) + \left(m - \frac{39}{2} \sin 2t\right) e_2(t)$ .

En  $M_m(t_0)$  on a  $\cos 2t_0 = 0$  et  $m = \frac{3}{2} \sin 2t_0$ , donc :  $M_m^{(4)}(t_0) = -12m e_2(t_0)$

On constate que  $\det(M_m'''(t_0), M_m^{(4)}(t_0)) = -48m^2 = -108 \neq 0$ .

On a donc  $M_m'(t_0) = M_m''(t_0) = \vec{0}$  et  $\det(M_m'''(t_0), M_m^{(4)}(t_0)) \neq 0$ .

Avec les notations du cours (en notant  $p < q$  les indices minimums tels que  $\det(M_m^{(p)}(t_0), M_m^{(q)}(t_0)) \neq 0$ ) on a  $p = 3$  (donc impair) et  $q = 4$  (donc pair.)

Cela signifie que  $M_m(t_0)$  n'est pas un rebroussement de  $\mathcal{C}_m$  (ni un point d'inflexion), mais un point d'allure "normale" (bien que ce soit un point stationnaire.)

NB : en un tel point la tangente est dirigée par  $M_m'''(t_0)$  donc par  $e_1(t_0)$ .

[Q]

(b) Soit  $M(x, y)$  un point du plan  $\mathbb{R}^2$ .

Le point  $M$  est sur  $\Gamma$  si et seulement si :  $\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} M = M_m(t) \\ m = \frac{3}{2} \sin(2t) = 3 \sin t \cos t \end{cases}$

Donc  $M \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \cos^3 t + 3 \sin^2 t \cos t = 3 \cos t - 2 \cos^3 t \\ y = \sin^3 t + 3 \cos^2 t \sin t = 3 \sin t - 2 \sin^3 t \end{cases}$

On a ainsi obtenu une représentation paramétrique de l'ensemble  $\Gamma$ . [Q]

(c) Pour tout réel  $t$ , on note  $\begin{cases} x(t) = 3 \cos t - 2 \cos^3 t \\ y(t) = 3 \sin t - 2 \sin^3 t \end{cases}$  et  $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

◇ *Domaine d'étude*

$x \mapsto x(t)$  et  $y \mapsto y(t)$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Elles sont  $2\pi$ -périodiques.

On peut donc se limiter à  $[t_0, t_0 + 2\pi]$  et on obtient toute la courbe.

La fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire.

On peut donc se limiter à  $[0, \pi]$  et compléter par la symétrie par rapport à  $Ox$ .

Pour tout réel  $t$ , on a les égalités  $x(\pi - t) = -x(t)$  et  $y(\pi - t) = y(t)$ .

On se limite donc à  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et on complète par la symétrie par rapport à  $Oy$ .

Pour tout réel  $t$ , on a les égalités  $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$  et  $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$ .

On se limite donc à  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et on complète par la symétrie par rapport à  $y = x$ .

Ainsi  $\Gamma$  a quatre axes de symétrie : les droites  $y = x, y = -x, y = 0$  et  $x = 0$ .

◇ *Tableau de variations*

$$M'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \sin t + 6 \sin t \cos^2 t \\ 3 \cos t - 6 \cos t \sin^2 t \end{pmatrix} = 3 \cos 2t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 3 \cos 2t e_2(t).$$

NB : en tout point non stationnaire la tangente en  $M(t)$  est dirigée par  $e_2(t)$ .

Pour tout  $t$ , on a  $M''(t) = 3 \cos 2t e_1(t) - 6 \sin 2t e_2(t)$ .

En tout point stationnaire ( $\cos 2t = 0$ ), on a  $M''(t) = -6 \sin 2t e_2(t) = \pm 6 e_2(t)$ .

En tout point stationnaire de  $\Gamma$ , la tangente est donc encore dirigée par  $e_2(t)$ .

Voici le tableau de variations sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Pour  $0 < t < \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ .

En  $M(0)$ , la tangente est verticale.

$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  est stationnaire.

La tangente en  $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$  est  $y = x$ , qui est axe de symétrie de  $\Gamma$ .

On en déduit que  $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$  est un rebroussement de première espèce.

	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'$	0	+	0
$x$	1	↗ $\sqrt{2}$	
$y$	0	↗ $\sqrt{2}$	
$y'$	3	+	0
$y'/x'$	$\infty$	↘ 1	

Enfin, pour  $t = \frac{\pi}{6}$ , on a  $x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.30$  et  $y = \frac{5}{4} = 1.25$ , avec  $\frac{y'}{x'} = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$ .

Voici comment tracer la courbe  $\Gamma$  avec Maple.

On a ajouté le tracé des deux premières bissectrices (en pointillés.)

> restart :

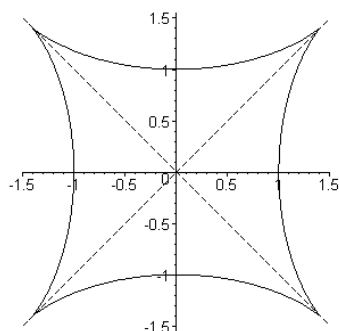
```
x :=t->3*cos(t)-2*cos(t)^3 : y :=t->3*sin(t)-2*sin(t)^3 :
```

```
opt :=(scaling=constrained) :
```

```
courbe1 :=plot([x(t),y(t),t=0..2*Pi],opt) :
```

```
axes :=plot([x,-x],x=-1.5..1.5,linestyle=4) :
```

```
plots[display](courbe1,axes) ;
```



[Q]

(d) Notons  $X(t), Y(t)$  les coordonnées de  $M(t)$  dans le nouveau repère.

Les formules de changement de repère sont : 
$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

On utilise les expressions  $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t + 3 \sin^2 t \cos t \\ y(t) = \sin^3 t + 3 \cos^2 t \sin t \end{cases}$  obtenues dans la question 2b.

$$\begin{cases} X(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x(t) + y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^3 t + 3 \sin^2 t \cos t + \sin^3 t + 3 \cos^2 t \sin t) \\ Y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x(t) + y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos^3 t - 3 \sin^2 t \cos t + \sin^3 t + 3 \cos^2 t \sin t) \end{cases}$$

On en déduit : 
$$\begin{cases} X(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t + \sin t)^3 = 2 \cos^3(t - \frac{\pi}{4}) \\ Y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos t + \sin t)^3 = 2 \sin^3(t - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Avec  $u = t - \frac{\pi}{4}$ , un paramétrage de  $\Gamma$  dans le nouveau repère est  $\begin{cases} X = 2 \cos^3 u \\ Y = 2 \sin^3 u \end{cases}$

On reconnaît une courbe classique :  $\Gamma$  est une astroïde. [Q]

(e) Soit  $t_0$  un réel tel que  $A = M_m(t_0)$ .

$A$  est également le point de paramètre  $t_0$  de la courbe  $\Gamma$  (cf question 2b.)

En ce point la tangente à  $\mathcal{C}_m$  est dirigée par  $e_1(t_0)$  et celle à  $\Gamma$  par  $e_2(t_0)$ .

Or  $(e_1(t_0) | e_2(t_0)) = 0$  : les deux tangentes sont donc orthogonales. [Q]

3. (a) On doit trouver pour quels réels  $m$  le système  $\begin{cases} x_m(t) = 0 \\ y_m(t) = 0 \end{cases}$  a des solutions  $t$ .

Ce système équivaut à  $\begin{cases} x_m(t) + y_m(t) = 0 \\ x_m(t) - y_m(t) = 0 \end{cases}$

Or  $\begin{cases} x_m(t) + y_m(t) = (\cos t + \sin t)(\cos^2 t - \cos t \sin t + \sin^2 t + m) \\ x_m(t) - y_m(t) = (\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t - m) \end{cases}$

Ainsi  $\begin{cases} x_m(t) + y_m(t) = (\cos t + \sin t)(1 - \frac{1}{2} \sin 2t + m) \\ x_m(t) - y_m(t) = (\cos t - \sin t)(1 + \frac{1}{2} \sin 2t - m) \end{cases}$

On en déduit  $\begin{cases} x_m(t) = 0 \\ y_m(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = -\sin t & \text{et } m = 1 + \frac{1}{2} \sin 2t \\ \text{ou} \\ \cos t = \sin t & \text{et } m = -1 + \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$

Ce système équivaut à  $\begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} \text{ mod } (\pi) & \text{et } m = 1 + \frac{1}{2} \sin 2t = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ t = \frac{\pi}{4} \text{ mod } (\pi) & \text{et } m = -1 + \frac{1}{2} \sin 2t = -\frac{1}{2} \end{cases}$

On peut donc conclure :

◇ Si  $|m| \neq \frac{1}{2}$ , la courbe  $\mathcal{C}_m$  ne passe pas par l'origine.

◇ Si  $m = \frac{1}{2}$ , la courbe  $\mathcal{C}_m$  passe par l'origine :  $M(t) = O \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} \text{ mod } (\pi)$ .