Développantes d'une astroïde

On se place dans le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$.

Pour tout m de $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{C}_m$ l'arc $t \mapsto M_m(t) = \begin{pmatrix} x_m(t) \\ y_m(t) \end{pmatrix}$ défini par $\begin{cases} x_m(t) = \cos^3 t + m \sin t \\ y_m(t) = \sin^3 t + m \cos t \end{cases}$

1. (a) Procéder à une réduction du domaine d'étude pour $\mathcal{C}_m$.
   Montrer notamment que $\mathcal{C}_m$ admet un centre et deux axes de symétrie. [S]

   (b) Montrer que $\mathcal{C}_{-m}$ est symétrique de $\mathcal{C}_m$ par rapport à l'axe Ox. [S]

2. (a) Montrer que $\mathcal{C}_m$ admet des points stationnaires si et seulement si $|m| \leq \frac{3}{2}$.
   Montrer que si $|m| < \frac{3}{2}$ ce sont des points de rebroussement. Et si $|m| = \frac{3}{2}$?
   Vérifier que $e_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ dirige toujours la tangente en $M_m(t)$ à $\mathcal{C}_m(t)$. [S]

   (b) On note Γ l'ensemble des points stationnaires des arcs $\mathcal{C}_m$.
   Montrer qu'un paramétrage de Γ est $t \mapsto M(t) \begin{cases} x(t) = 3\cos t - 2\cos^3 t \\ y(t) = 3\sin t - 2\sin^3 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. [S]

   (c) Etudier et tracer l'arc Γ.
   Vérifier que la tangente en $M(t)$ à Γ est toujours dirigée par $e_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. [S]

   (d) Soit $\mathcal{R}$ le repère déduit du repère canonique par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Montrer qu'un paramétrage de Γ dans $\mathcal{R}$ est $\begin{cases} X(u) = 2\cos^3 u \\ Y(u) = 2\sin^3 u \end{cases}$ (Any comment ?)
   [S]

   (e) Dans cette question, on suppose que $|m| \leq \frac{3}{2}$. Soit A un point stationnaire de $\mathcal{C}_m$.
   Le point A appartient donc également à la courbe Γ.
   Montrer qu'au point A les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ et Γ sont orthogonales. [S]

3. (a) Pour quelles valeurs de m l'arc $\mathcal{C}_m$ passe-t-il par l'origine ? [S]

   (b) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}_{1/2}$. [S]

4. (a) Ecrire l'équation de la tangente $\mathcal{D}_m(t)$ au point $M_m(t)$ de $\mathcal{C}_m$. [S]

   (b) Soit $H_m(t)$ la projection orthogonale de O sur la droite $\mathcal{D}_m(t)$.
   On note $\mathcal{P}_m$ la trajectoire du point $H_m(t)$ quand $M_m(t)$ décrit $\mathcal{C}_m$.
   Montrer que $\mathcal{P}_m$ admet le paramétrage $\rho = m + \frac{1}{2}\sin 2\theta$ en polaires. [S]

   (c) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{P}_{1/2}$. [S]

5. Etudier et tracer les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{3/4}$, $\mathcal{C}_{3/2}$. [S]

6. (a) Soit $\mathcal{D}(\theta)$ la droite passant par O et d'angle polaire θ.
   Cette droite rencontre (en général) $\mathcal{D}_m(\theta)$ en un unique point $N_m(\theta)$.
   Trouver un paramétrage en polaires de la trajectoire du point $N_m(\theta)$. [S]

(b) Etudier et construire cette trajectoire quand $m = \frac{1}{2}$. [S]

7. (a) On fixe le réel t. Montrer que la tangente $\Delta(t)$ au point $M(t)$ de Γ est aussi la normale en $M_m(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_m$, et ceci pour tout m de $\mathbb{R}$. [S]

   (b) On oriente $\Delta(t)$ par le vecteur $e_2(t)$ (cf question 2c.)
   Pour tous réels m et n, préciser la mesure algébrique de $\overline{M_m(t)M_n(t)}$ sur $\Delta(t)$.
   Qu'en déduit-on concernant les courbes $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_n$? [S]

8. Dans cette question, on suppose $m > \frac{3}{2}$.
   D'après la question (2a), la courbe $\mathcal{C}_m$ ne présente pas de point stationnaire.
   On oriente $\mathcal{C}_m$ dans le sens des paramètres t croissants.
   On munit alors $\mathcal{C}_m$ d'une abscisse curviligne (d'origine quelconque sur cet arc.)

   (a) Calculer la longueur totale de l'arc $\mathcal{C}_m$. [S]

   (b) Préciser le repère de Frenet $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ au point $M_m(t)$ de l'arc $\mathcal{C}_m$. [S]

   (c) Calculer le rayon de courbure $R_m(t)$ au point $M_m(t)$ de $\mathcal{C}_m$. [S]

   (d) Préciser les coordonnées du centre de courbure $\Omega_m(t)$ au point $M_m(t)$ de $\mathcal{C}_m$.
   Quelle est la trajectoire du point $\Omega_m(t)$ quand $M_m(t)$ parcourt $\mathcal{C}_m$? [S]

9. Reprendre la question précédente en supposant cette fois $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$.
   Pour simplifier les calculs on pourra poser $m = \frac{3}{2}\sin 2t_0$, avec $0 \leq t_0 \leq \frac{\pi}{4}$.
   On déterminera encore la longueur totale de $\mathcal{C}_m$ mais pour le calcul de $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, R, \Omega$ on se placera sur un sous-arc sans point stationnaire (orienté dans le sens des t croissants.)
   On conviendra qu'en un point stationnaire M on a $R = 0$ donc $\Omega = M$. [S]

Corrigé du problème

1. (a) Pour tout réel m, on définit les applications $\begin{cases} t \mapsto x_m(t) = \cos^3 t + m \sin t \\ t \mapsto y_m(t) = \sin^3 t + m \cos t \end{cases}$

On pose aussi $M_m(t) = (x_m(t), y_m(t))$.

- ◇ Pour tout m de $\mathbb{R}$, les applications x_m et y_m sont 2π-périodiques.

  On peut donc limiter l'étude à $[t_0, t_0 + 2\pi]$ (et toute la courbe est obtenue.)

- ◇ Pour tous réels m, t, on a $x_m(t + \pi) = -x_m(t)$ et $y_m(t + \pi) = -y_m(t)$.

  Les points $M_m(t)$ et $M_m(t + \pi)$ sont donc symétriques par rapport à l'origine.

  On limite alors l'étude à $[t_0, t_0 + \pi]$, puis on complète par cette symétrie.

- ◇ Pour tous réels m, t, on a $x_m(\frac{\pi}{2} - t) = y_m(t)$ et $y_m(\frac{\pi}{2} - t) = x_m(t)$.

  $M_m(t)$ et $M_m(\frac{\pi}{2} - t)$ sont donc symétriques par rapport à la droite $y = x$.

  On centre alors $[t_0, t_0 + \pi]$ en $\frac{\pi}{4}$, ce qui donne l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

  On se limite à la partie gauche de cet intervalle, c'est-à-dire $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

  On complète alors par la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Finalement, le domaine d'étude est $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

On obtient alors une partie de la courbe $\mathcal{C}_m$, à laquelle il suffit d'appliquer la symétrie par rapport à la droite $y = x$ puis par rapport à l'origine pour obtenir tout $\mathcal{C}_m$.

On constate bien que :

- ◇ L'origine est centre de symétrie de chaque courbe $\mathcal{C}_m$.

- ◇ La droite $y = x$ (première bissectrice) est axe de symétrie de chaque courbe $\mathcal{C}_m$.

- ◇ La droite $y = -x$ (seconde bissectrice) est axe de symétrie de chaque courbe $\mathcal{C}_m$.

  En effet la symétrie par rapport à $y = -x$ est la composée de la symétrie par rapport à $y = x$ et de la symétrie par rapport à l'origine.

  D'ailleurs pour tous réels m, t, on a : $x_m(\frac{3\pi}{2} - t) = -y_m(t)$ et $y_m(\frac{3\pi}{2} - t) = -x_m(t)$.

Remarque :

La réduction de l'étude à $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ s'applique à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$.

Mais si $m = 0$, alors pour tout réel t on a $x_0(-t) = x_0(t)$ et $y_0(-t) = -y_0(t)$.

Si $m = 0$ on se limite à $[0, \frac{\pi}{4}]$ et on complète par la symétrie par rapport à Ox.

La courbe $\mathcal{C}_0$ possède ainsi Ox et Oy comme axes de symétrie supplémentaires.

[Q]

(b) Pour tous réels m, t, on a $x_m(-t) = x_{-m}(t)$ et $y_m(-t) = -y_{-m}(t)$.

Autrement dit, $M_m(-t)$ et $M_{-m}(-t)$ sont symétriques par rapport à Ox.

Quand t parcourt $\mathbb{R}$, ces point parcourent respectivement $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_{-m}$.

Ces deux courbes sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox.

Remarque : si $m = 0$, on retrouve que $\mathcal{C}_0$ possède l'axe Ox comme axe de symétrie.
[Q]

2. (a) Le point $M_m(t)$ est stationnaire sur $\mathcal{C}_m$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x'_m(t) = 0 \\ y'_m(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sin t\cos^2 t + m\cos t = 0 \\ 3\cos t\sin^2 t - m\sin t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - \frac{3}{2}\sin 2t)\cos t = 0 \\ (\frac{3}{2}\sin 2t - m)\sin t = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à $m = \frac{3}{2}\sin 2t$, qui n'a de solution en t que si $|m| \leq \frac{3}{2}$.

Ainsi la courbe $\mathcal{C}_m$ ne possède de point stationnaire que si et seulement si $|m| \leq \frac{3}{2}$.

◇ On va maintenant étudier la nature de ces points stationnaires.

On pose $M'_m(t) = \begin{pmatrix} x'_m(t) \\ y'_m(t) \end{pmatrix}$, $M''_m(t) = \begin{pmatrix} x''_m(t) \\ y''_m(t) \end{pmatrix}$ et enfin $M'''_m(t) = \begin{pmatrix} x'''_m(t) \\ y'''_m(t) \end{pmatrix}$.

On voit que $M'_m(t) = (m - \frac{3}{2}\sin 2t)\, e_1(t)$, avec $e_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$.

NB : En un point non stationnaire, $e_1(t)$ dirige donc la tangente à $\mathcal{C}_m$ en $M_m(t)$.

Notons $e_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$: la base mobile $e_1(t), e_2(t)$ est orthonormale directe.

Pour tout réel t, on a $e'_1(t) = -e_2(t)$ et $e'_2(t) = e_1(t)$. Ainsi $e''_1(t) = -e_1(t)$.

On en déduit $\begin{cases} M''_m(t) = -3\cos 2t\, e_1(t) - \left(m - \frac{3}{2}\sin 2t\right) e_2(t) \\ M'''_m(t) = \left(\frac{15}{2}\sin 2t - m\right) e_1(t) + 6\cos 2t\, e_2(t) \end{cases}$

◇ Plaçons-nous maintenant en un point $M_m(t_0)$ stationnaire de $\mathcal{C}_m$.

En ce point on a $m = \frac{3}{2}\sin 2t_0$, donc : $\begin{cases} M''_m(t_0) = -3\cos 2t_0\, e_1(t_0) \\ M'''_m(t_0) = 6\sin 2t_0\, e_1(t_0) + 6\cos 2t_0\, e_2(t_0) \end{cases}$

On calcule $\det(M''_m(t_0), M'''_m(t_0))$ dans la base orthonormée directe $e_1(t_0), e_2(t_0)$.

On trouve $\det(M''_m(t_0), M'''_m(t_0)) = -18\cos^2 2t_0 = 18(\sin^2 2t_0 - 1) = 8\left(m^2 - \frac{9}{4}\right)$

◇ On en déduit que si $|m| < \frac{3}{2}$, alors $M'(t_0) = \overrightarrow{0}$ et $\det(M''_m(t_0), M'''_m(t_0)) \neq 0$.

Les points stationnaires $\mathcal{C}_m$ sont donc des rebroussements de première espèce.

NB : en un tel point la tangente est dirigée par $M''_m(t_0)$ donc par $e_1(t_0)$.

◇ Si $|m| = \frac{3}{2}$, alors $|\sin 2t_0| = 1$ donc $\cos 2t_0 = 0$.

On a alors $M_m''(t_0) = \overrightarrow{0}$ et $M_m'''(t_0) = 6\sin 2t_0\, e_1(t_0) = 4m\, e_1(t_0) = \pm 6e_1(t_0)$.

On doit maintenant calculer la dérivée quatrième du vecteur $M_m(t)$.

En dérivant $M_m'''(t)$, on trouve : $M_m^{(4)}(t) = 21\cos 2t\, e_1(t) + \Bigl(m - \frac{39}{2}\sin 2t\Bigr)e_2(t)$.

En $M_m(t_0)$ on a $\cos 2t_0 = 0$ et $m = \frac{3}{2}\sin 2t_0$, donc : $M_m^{(4)}(t_0) = -12m\, e_2(t_0)$

On constate que $\det(M_m'''(t_0), M_m^{(4)}(t_0)) = -48m^2 = -108 \neq 0$.

On a donc $M_m'(t_0) = M_m''(t_0) = \overrightarrow{0}$ et $\det(M_m'''(t_0), M_m^{(4)}(t_0)) \neq 0$.

Avec les notations du cours (en notant $p < q$ les indices minimums tels que $\det(M_m^{(p)}(t_0), M_m^{(q)}(t_0)) \neq 0$) on a $p = 3$ (donc impair) et $q = 4$ (donc pair.)

Cela signifie que $M_m(t_0)$ n'est pas un rebroussement de $\mathcal{C}_m$ (ni un point d'inflexion), mais un point d'allure “normale” (bien que ce soit un point stationnaire.)

NB : en un tel point la tangente est dirigée par $M_m'''(t_0)$ donc par $e_1(t_0)$.

[Q]

(b) Soit $M(x, y)$ un point du plan $\mathbb{R}^2$.

Le point M est sur Γ si et seulement si : $\exists\, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} M = M_m(t) \\ m = \frac{3}{2}\sin(2t) = 3\sin t\cos t \end{cases}$

Donc $M \in \Gamma \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \cos^3 t + 3\sin^2 t\, \cos t = 3\cos t - 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t + 3\cos^2 t\, \sin t = 3\sin t - 2\sin^3 t \end{cases}$

On a ainsi obtenu une représentation paramétrique de l'ensemble Γ. [Q]

(c) Pour tout réel t, on note $\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 2\cos^3 t \\ y(t) = 3\sin t - 2\sin^3 t \end{cases}$ et $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

◇ *Domaine d'étude*

$x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y(t)$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont 2π-périodiques.

On peut donc se limiter à $[t_0, t_0 + 2\pi]$ et on obtient toute la courbe.

La fonction x est paire et la fonction y est impaire.

On peut donc se limiter à $[0, \pi]$ et compléter par la symétrie par rapport à Ox.

Pour tout réel t, on a les égalités $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$.

On se limite donc à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on complète par la symétrie par rapport à Oy.

Pour tout réel t, on a les égalités $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$.

On se limite donc à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et on complète par la symétrie par rapport à $y = x$.

Ainsi Γ a quatre axes de symétrie : les droites $y = x$, $y = -x$, $y = 0$ et $x = 0$.

◇ *Tableau de variations*

$$M'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin t + 6\sin t\,\cos^2 t \\ 3\cos t - 6\cos t\,\sin^2 t \end{pmatrix} = 3\cos 2t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 3\cos 2t\, e_2(t).$$

NB : en tout point non stationnaire la tangente en $M(t)$ est dirigée par $e_2(t)$.

Pour tout t, on a $M''(t) = 3\cos 2t\, e_1(t) - 6\sin 2t\, e_2(t)$.

En tout point stationnaire ($\cos 2t = 0$), on a $M''(t) = -6\sin 2t\, e_2(t) = \pm 6\, e_2(t)$.

En tout point stationnaire de Γ, la tangente est donc encore dirigée par $e_2(t)$.

Voici le tableau de variations sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Pour $0 < t < \frac{\pi}{4}$, $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

En $M(0)$, la tangente est verticale.

$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est stationnaire.

La tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est $y = x$,

qui est axe de symétrie de Γ.

On en déduit que $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est un

rebroussement de première espèce.

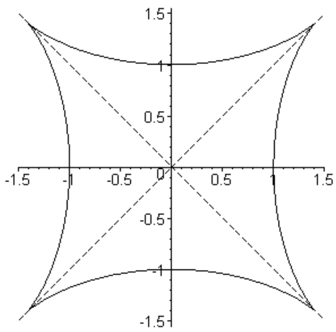
	0		$\pi/4$
x'	0	$+$	0
x	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$
y'	3	$+$	0
y'/x'	∞	$\searrow$	1

Enfin, pour $t = \frac{\pi}{6}$, on a $x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.30$ et $y = \frac{5}{4} = 1.25$, avec $\dfrac{y'}{x'} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$.

Voici comment tracer la courbe Γ avec Maple.

On a ajouté le tracé des deux premières bissectrices (en pointillés.)

```
> restart :
  x :=t->3*cos(t)-2*cos(t)^3 : y :=t->3*sin(t)-2*sin(t)^3 :
  opt :=(scaling=constrained) :
  courbe1 :=plot([x(t),y(t),t=0..2*Pi],opt) :
  axes :=plot([x,-x],x=-1.5..1.5,linestyle=4) :
  plots[display](courbe1,axes) ;
```



[Q]

(d) Notons $X(t), Y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le nouveau repère.

Les formules de changement de repère sont : $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

On utilise les expressions $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t + 3\sin^2 t\,\cos t \\ y(t) = \sin^3 t + 3\cos^2 t\,\sin t \end{cases}$ obtenues dans la question 2b.

$$\begin{cases} X(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x(t) + y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^3 t + 3\sin^2 t\,\cos t + \sin^3 t + 3\cos^2 t\,\sin t) \\ Y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x(t) + y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos^3 t - 3\sin^2 t\,\cos t + \sin^3 t + 3\cos^2 t\,\sin t) \end{cases}$$

On en déduit : $\begin{cases} X(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t + \sin t)^3 = 2\cos^3(t - \frac{\pi}{4}) \\ Y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos t + \sin t)^3 = 2\sin^3(t - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

Avec $u = t - \frac{\pi}{4}$, un paramétrage de Γ dans le nouveau repère est $\begin{cases} X = 2\cos^3 u \\ Y = 2\sin^3 u \end{cases}$

On reconnait une courbe classique : Γ est une astroïde. [Q]

(e) Soit t_0 un réel tel que $A = M_m(t_0)$.

A est également le point de paramètre t_0 de la courbe Γ (cf question 2b.)

En ce point la tangente à $\mathcal{C}_m$ est dirigée par $e_1(t_0)$ et celle à Γ par $e_2(t_0)$.

Or $(e_1(t_0) \mid e_2(t_0)) = 0$: les deux tangentes sont donc orthogonales. [Q]

3. (a) On doit trouver pour quels réels m le système $\begin{cases} x_m(t) = 0 \\ y_m(t) = 0 \end{cases}$ a des solutions t.

Ce système équivaut à $\begin{cases} x_m(t) + y_m(t) = 0 \\ x_m(t) - y_m(t) = 0 \end{cases}$

Or $\begin{cases} x_m(t) + y_m(t) = (\cos t + \sin t)(\cos^2 t - \cos t\,\sin t + \sin^2 t + m) \\ x_m(t) - y_m(t) = (\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t\,\sin t + \sin^2 t - m) \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} x_m(t) + y_m(t) = (\cos t + \sin t)(1 - \frac{1}{2}\sin 2t + m) \\ x_m(t) - y_m(t) = (\cos t - \sin t)(1 + \frac{1}{2}\sin 2t - m) \end{cases}$

On en déduit $\begin{cases} x_m(t) = 0 \\ y_m(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = -\sin t \quad \text{et} \quad m = 1 + \frac{1}{2}\sin 2t \\ \text{ou} \\ \cos t = \sin t \quad \text{et} \quad m = -1 + \frac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$

Ce système équivaut à $\begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} \mod (\pi) \quad \text{et} \quad m = 1 + \frac{1}{2}\sin 2t = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ t = \frac{\pi}{4} \mod (\pi) \quad \text{et} \quad m = -1 + \frac{1}{2}\sin 2t = -\frac{1}{2} \end{cases}$

On peut donc conclure :

◇ Si $|m| \neq \frac{1}{2}$, la courbe $\mathcal{C}_m$ ne passe pas par l'origine.

◇ Si $m = \frac{1}{2}$, la courbe $\mathcal{C}_m$ passe par l'origine : $M(t) = O \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} \mod (\pi)$.