BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 298

CONCOURS D'ADMISSION DE 2014

Conception : ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

MATHÉMATIQUES

OPTION ÉCONOMIQUE

Mardi 6 mai 2014, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M).

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

d) Montrer que A possède trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2) L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(*i*) M est une matrice de E.

(*ii*) $P^{-1}MP$ commute avec D.

Tournez la page S.V.P.

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} \text{ et } P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E.

Exercice 2

1) Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

2) Établir que f est impaire.

3) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) a) En utilisant la relation $t^2 \le t^2+1 \le t^2+2t+1$, valable pour tout réel t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \le f(x) \le \ln 2$$

b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5) a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

6) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\,dt$.

b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \le x - f(x) \le \frac{7}{6}x^3$$

c) Conclure que : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$

d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = u_k$$

2) a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Compléter la fonction Pascal suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X.

```
Function X(theta : real) : integer ;
var Y : real ;
Begin Y := 0 ;   Repeat Y : = Y + 1 ; until(------) ; X := ------ ; end ;
```

3) Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit la fonction L, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \; L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

où $x_1, x_2, ..., x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.

L'objectif est de choisir la valeur de θ qui rend $L(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln(L(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

b) On considère la fonction φ, définie par :

$$\forall \theta \in]0, +\infty[, \; \varphi(\theta) = S_n \ln \theta - (S_n + n) \ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta_n}$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta_n}$ pour la fonction L ?

On pose dorénavant : $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

d) Calculer le risque quadratique $r_{T_n}(\theta)$ de T_n et vérifier que $\lim_{n \to +\infty} r_{T_n}(\theta) = 0$.

Problème

1) Soit x un réel quelconque.

a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x, t) dt$.

b) Montrer que : $y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, en posant $Y = \int_0^1 \max(X, t) dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

2) Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3) On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$$

a) Déterminer la valeur de $P(X=0)$.

b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y.

c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
Var u : integer ;
Begin
u : = random(4) ;
If ------ then ------ else y : = ------ ;
End ;
```

4) On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

e) Donner la valeur de $E(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
Function y : real ;
    Var u : real ;
  Begin
    u : = random ;
    y : = ------ ;
  End ;
```

5) On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $([X \le 0], [0 < X \le 1], [X > 1])$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) \text{ si } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \Phi(x) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

EDHEC 2014 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

Le langage turbo-Pascal n'étant plus au programme, nous n'avons pas traité les questions informatiques.

EXERCICE I

1–a)

Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A-\lambda I$ n'est pas inversible

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow (7-\lambda)L_1 - 6L_3]{L_2 \longleftarrow L_1 - L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -23-\lambda & \lambda^2-10\lambda+15 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftarrow L_2 + L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -21 & \lambda^2-11\lambda+16 \\ 0 & -23-\lambda & \lambda^2-10\lambda+15 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow 21L_3 - (23+\lambda)L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -21 & \lambda^2-11\lambda+16 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda-53 \end{pmatrix}$$

La dernière matrice est triangulaire ; elle n'est pas inversible (donc $A-\lambda I$ non plus) si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, autrement dit

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{R} \text{ est valeur propre de } A \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est racine de l'équation : } \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0}$$

1–b)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9)$$
$$f'(x) = 0 \iff x \in \{3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})\}$$

En effet $f'(x) = 0 \iff x^2 - 6x - 9 = 0 \iff (x-3)^2 - 18 = 0 \iff x - 3 = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$.

Le signe du trinôme est celui de $f'(x)$, donc il donne le sens de variations de f. Ce trinôme est positif à l'extérieur de l'intervalle $[3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})]$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$3(1-\sqrt{2})$		$3(1+\sqrt{2})$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ sont celles de son monôme de plus haut degré, donc celles de x^3.

1–c)

$f(0) = 53 > 0$ et $f(3) = -82 < 0$. Sur l'intervalle $[3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})]$ la fonction f est strictement décroissante ; 0 et 3 appartiennent à cet intervalle ; on a les inégalités $3(1-\sqrt{2}) < 0 < 3 < 3(1+\sqrt{2})$; par stricte décroissance de f on obtient $f(3(1+\sqrt{2})) < f(3) < f(0) < f(3(1-\sqrt{2})) \iff m < -82 < 53 < M$. Ceci prouve que

$$\boxed{m < 0 \text{ et } M > 0}$$

1–d)

- Sur $]-\infty, 3(1-\sqrt{2})]$, la fonction f est continue, strictement croissante (d'après son tableau de variations), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(3(1-\sqrt{2})) = M$.

On en conclut que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, 3(1-\sqrt{2})]$ sur son image qui est $]-\infty, M]$. Or $M > 0$, donc il existe un unique réel $\lambda_1 < 3(1-\sqrt{2})$ tel que $f(\lambda_1) = 0$. On peut remarquer qu'effectivement $\lambda_1 < 3(1-\sqrt{2})$ car $f(3(1-\sqrt{2}) > f(\lambda_1)$.

- On montre de la même manière que f réalise une bijection continue, strictement décroissante de $[3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})]$ sur $[m, M]$. L'inégalité $m < 0 < M$ permet de dire qu'il existe un unique réel $\lambda_2 \in]3(1-\sqrt{2}), 3(1+\sqrt{2})[$ tel que $f(\lambda_2) = 0$.

- Puis, même méthode pour affirmer qu'il existe un unique réel $\lambda_3 > 3(1+\sqrt{2})$ tel que $f(\lambda_3) = 0$.

Les racines de f étant les valeurs propres de A d'après la question 1–a),

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet trois valeurs propres } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3}$$

1–e)

La matrice A admet 3 valeurs propres distinctes, elle appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ (c'est une condition suffisante de diagonalisabilité).

A est donc semblable à la matrice $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Il existe dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible P, telle que $D = P^{-1}AP$ et l'on sait, d'après le cours, que cette égalité équivaut à

$$\boxed{\text{Il existe dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ une matrice inversible } P, \text{ telle que } A = PDP^{-1}}$$

2–a)

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$MD = DM \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 & c\lambda_3 \\ x\lambda_1 & y\lambda_2 & z\lambda_3 \\ u\lambda_1 & v\lambda_2 & w\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ \lambda_2 x & \lambda_2 y & \lambda_2 z \\ \lambda_3 u & \lambda_3 v & \lambda_3 w \end{pmatrix}$$

$$MD = DM \iff \begin{cases} a\lambda_1 & = \lambda_1 a \\ b\lambda_2 & = \lambda_1 b \\ c\lambda_3 & = \lambda_1 c \\ x\lambda_1 & = \lambda_2 x \\ y\lambda_2 & = \lambda_2 y \\ z\lambda_3 & = \lambda_2 z \\ u\lambda_1 & = \lambda_3 u \\ v\lambda_2 & = \lambda_3 v \\ w\lambda_3 & = \lambda_3 w \end{cases} \iff \begin{cases} a & \in \mathbb{R} \\ b(\lambda_2 - \lambda_1) & = 0 \\ c(\lambda_3 - \lambda_1) & = 0 \\ x(\lambda_1 - \lambda_2) & = 0 \\ y & \in \mathbb{R} \\ z(\lambda_3 - \lambda_2) & = 0 \\ u(\lambda_1 - \lambda_3) & = 0 \\ v(\lambda_2 - \lambda_3) & = 0 \\ w & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$MD = DM \iff (a, y, w) \in \mathbb{R}^3$ et $b = c = x = z = u = v = 0$ car $\lambda_2 - \lambda_1,\ \lambda_3 - \lambda_2$ et $\lambda_3 - \lambda_1$ sont non nuls.

$$\boxed{DM = MD \iff \exists\,(a, y, w) \in \mathbb{R}^3 \ /\ M = \mathrm{Diag}(a, y, w) \ :\ M \text{ est une matrice diagonale}}$$

2–b)

(i) $MA = AM \iff M(PDP^{-1}) = (PDP^{-1})M$ d'après 1–e)
$\iff MPDP^{-1} = PDP^{-1}M$ associativité
$\iff P^{-1}(MPDP^{-1})P = P^{-1}(PDP^{-1}M)P$

Il ya équivalence car on a multiplié l'égalité précédente par P^{-1} à gauche et P à droite et ces deux matrices sont inversibles.

$$MA = AM \iff P^{-1}(MPD)\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I} = \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I}(DP^{-1}M)P$$
$$\iff P^{-1}(MPD) = (DP^{-1}M)P$$

$$\boxed{AM = MA \iff (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP) \quad : \text{conclusion } \textbf{(i)}\!\iff\!\textbf{(ii)}}$$

2–c)

$M \in E \iff P^{-1}MP$ commute avec D d'après b)
$\iff P^{-1}MP$ est diagonale d'après a)

$$\iff P^{-1}MP \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$\iff P^{-1}MP \in \mathrm{vect}(U, V, W)$$

où $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par suite

$$M \in E \iff \exists\,(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ /\ P^{-1}MP = \alpha U + \beta V + \gamma W$$
$$\iff \exists\,(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ /\ M = P(\alpha U + \beta V + \gamma W)P^{-1}$$
$$\iff \exists\,(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ /\ M = \alpha PUP^{-1} + \beta PVP^{-1} + \gamma PWP^{-1}$$

$$\boxed{M \in E \iff M \in \mathrm{vect}(PUP^{-1}, PVP^{-1}, PWP^{-1})}$$

2–d)

- Puisque nous avons raisonné par équivalences dans le c), on en conclut que $E = \mathrm{vect}(PUP^{-1}, PVP^{-1}, PWP^{-1})$

$$\boxed{E = \mathrm{vect}(PUP^{-1}, PVP^{-1}, PWP^{-1}) \Longrightarrow E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

- Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ / $aPUP^{-1} + bPVP^{-1} + cPWP^{-1} = (0)$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

$aPUP^{-1} + bPVP^{-1} + cPWP^{-1} = (0) \iff P(aU + bV + cW)P^{-1} = (0)$
$\iff aU + bV + cW = (0)$ on a simplifié par P et P^{-1} qui sont inversibles
$\iff a = b = c = 0,$

car la famille (U, V, W) est une sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est donc une famille libre.

Conclusion : la famille $(PUP^{-1}, PVP^{-1}, PWP^{-1})$ est une famille libre ; c'est aussi une famille génératrice de E, donc c'est une base de E.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ de dimension } 3}$$

2–e)

Soit Q un polynôme annulateur de A. D'après le cours, les valeurs propres de A sont <u>des</u> racines de Q. Par conséquent Q admet 3 racines distinctes, il est au moins de degré 3 : en effet, si Q était de degré ≤ 2, il admettrait au plus deux racines, ce qui est contradictoire.

$$\boxed{A \text{ n'admet pas de polynôme annulateur de degré} \leq 2}$$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ / $aI + bA + cA^2 = (0)$. Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, le polynôme non nul $a + bX + cX^2$ est annulateur de A. Il est de degré ≤ 2, cela est contradictoire. Donc $(a,b,c) = (0,0,0)$.

La famille (I, A, A^2) est une famille libre. Il est clair que I, A et A^2 commutent avec A, donc appartiennent à E.

$$\boxed{(I, A, A^2) \text{ est une famille libre de } E \text{ ; } \dim E = 3, \text{ donc } (I, A, A^2) \text{ est une base de } E}$$

EXERCICE II

1)

La fonction $t \mapsto t^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est continue sur $\mathbb{R}_+$), donc par composition, la fonction $t \mapsto \sqrt{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $t^2 + 1 > 0 \Longrightarrow \sqrt{t^2+1} > 0$, donc $\sqrt{t^2+1}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \text{ existe : } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

2)

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}.$

Posons $t = -u$; $dt = -du$. Le changement est C^1 sur $\mathbb{R}$ car affine.

$f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{u^2+1}}$ car $t = -x \Longrightarrow u = x$; $t = -2x \Longrightarrow u = 2x$ et $(-u)^2 = u^2$.

$f(-x) = -f(x).$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \text{ : la fonction } f \text{ est impaire}}$$

3–a)

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives. Soit G l'une d'entre elles.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = G(2x) - G(x)$.
La fonction $x \mapsto 2x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale ; la fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de la fonction continue g. Par composition la fonction $x \mapsto G(2x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Par différence, la fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

3–b)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x)\\ &= 2g(2x) - g(x)\\ &= \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}.\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{\sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1+1}.\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 4x^2+4 > 4x^2+1 > 0$; la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\sqrt{4x^2+4} > \sqrt{4x^2+1}$. Par suite $\sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1} > 0$, donc
$\dfrac{\sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1+1}.\sqrt{x^2+1}} > 0$ puisque $\sqrt{4x^2+1+1}.\sqrt{x^2+1} > 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0 : f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

4–a)

Pour tout $t > 0$, la double inégalité de l'énoncé s'écrit : $0 < t^2 \leq t^2+1 \leq (t+1)^2$.
Elle équivaut à : $0 < \sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2+1} \leq \sqrt{(t+1)^2}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or $\sqrt{t^2} = |t| = t$ car $t > 0$; de même $\sqrt{(t+1)^2} = |t+1| = t+1$ car $t+1 > 0$. On obtient donc $0 < t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t+1$.
La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité précédente équivaut à : $0 < \dfrac{1}{t+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \dfrac{1}{t}$.

On intègre cet encadrement entre x et $2x$; $x > 0 \Longrightarrow x < 2x$. Les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, on obtient donc

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \iff \Big[\ln|t+1|\Big]_x^{2x} \leq f(x) \leq \Big[\ln|t|\Big]_x^{2x}$$
$$\iff \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2x) - \ln x$$

Les valeurs absolues sont inutiles car $2x+1,\ x+1$ et x sont > 0.
De plus $\ln(2x) - \ln x = \ln \frac{2x}{x} = \ln 2$. L'encadrement précédent s'écrit :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2}$$

4–b)

$\forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+1} = 2 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = \ln 2$ par continuité de la fonction $\ln$ au point 2.
D'après le théorème d'encadrement, l'encadrement précédent donne

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2}$$

4–c)

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
f	$-\ln 2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\ln 2$

La fonction f est impaire d'après la question 2), $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\ln 2$.

$f(x) = G(2x) - G(x)$ (voir 3–a)), donc $f(0) = G(0) - G(0) = 0$.

4–d)

La fonction f est strictement croissante ; $f(0) = 0$, donc
$\forall x < 0,\ f(x) < f(0) = 0$ et $\forall x > 0,\ f(0) = 0 < f(x)$. Par suite,

$$\boxed{f(x) = 0 \iff x = 0}$$

5–a)

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 > x^2$; par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{x^2+1} > |x|$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ x + |x| \geq 0$. En effet,

$x \geq 0 \Longrightarrow |x| = x$, donc $x + |x| = 2x \geq 0$.

$x \leq 0 \Longrightarrow |x| = -x$, donc $x + |x| = x - x = 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{x^2+1} > x + |x|$, par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{x^2+1} > 0}$$

5–b)

- Vérifions que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; par composition la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ d'après la question précédente ; la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \quad \text{après réduction du numérateur au même dénominateur}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$

On a utilisé les formules de dérivation suivantes $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\cdot$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) &= \int_x^{2x} h'(t)dt = \Big[h(t)\Big]_x^{2x} \\ &= \ln(2x + \sqrt{(2x)^2+1}) - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

6–a)

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ x - f(x) &= \int_x^{2x} dt - \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= \int_x^{2x} (1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}})dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}}dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1}-1)(\sqrt{t^2+1}+1)}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)}dt\end{aligned}$$

on utilise l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, il vient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)}dt}$$

6–b)

$\forall x > 0,\ x < 2x$ (les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant) ;

$t \mapsto \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas), positive donc

$$\forall x > 0,\ x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)}dt \geq 0.$$

De plus, on a $1 \leq \sqrt{t^2+1}$; $2 \leq 1+\sqrt{t^2+1}$ (on a ajouté 1 aux deux termes de l'égalité). On multiplie ces deux inégalités entre nombres positifs, d'où

$2 \leq \sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})$, puis (la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 < \frac{1}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \leq \frac{1}{2}$$

On multiplie cet encadrement par $t^2 \geq 0$, puis on intègre entre x et $2x$ (avec $x < 2x$) et l'on obtient

$\forall x > 0,\ 0 \leq x - f(x) \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{2}dt$, soit $0 \leq x - f(x) \leq \left[\dfrac{t^3}{6}\right]_x^{2x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7x^3}{6}}$$

6–c)

L'encadrement précédent s'écrit aussi : $\forall x > 0,\ x - \dfrac{7x^3}{6} \leq f(x) \leq x$. On divise les 3 membres par $x > 0$:

$$1 - \frac{7x^2}{6} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1$$

Par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$, ce qui veut dire

$$\boxed{f(x) \underset{(0^+)}{\sim} x}$$

$\forall x < 0,\ \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{-f(x)}{-x} = \dfrac{f(-x)}{-x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(-x)}{-x} = 1$ car $x \to 0^- \iff -x \to 0^+$. Donc

$$\boxed{f(x) \underset{(0^-)}{\sim} x}$$

On peut remarquer deux choses :

i) La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est paire car $\dfrac{f(-x)}{-x} = \dfrac{-f(x)}{-x} = \dfrac{f(x)}{x}$; donc

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \iff \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$; donc $f(x) \underset{(0)}{\sim} x$.

EXERCICE III

1)

$\theta > 0 \implies 0 < \dfrac{1}{1+\theta} < 1$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k > 0$. D'autre part, on a $0 < \dfrac{\theta}{1+\theta} < 1$ car $0 < \theta < 1+\theta$; la série de terme général $\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$ est donc convergente en tant que série géométrique de raison $\dfrac{\theta}{1+\theta} \in]0,1[$.

La série de terme général u_k est convergente et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k \\
&= \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k \\
&= \frac{1}{1+\theta}\frac{1}{1-\dfrac{\theta}{1+\theta}} \\
&= \frac{1}{1+\theta}\frac{1+\theta}{1+\theta-\theta} = 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k > 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 1. \text{ La suite } (u_k)_{k\geq 0} \text{ définit une loi de probabilité}}$$

2–a)

$X(\Omega) = \mathbb{N} \implies Y(\Omega) = (X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{R}^*,\ P(Y=k) &= P(X+1=k) \\
&= P(X=k-1) \\
&= \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

Cette expression est de la forme pq^{k-1} avec $p = \dfrac{1}{1+\theta} \in]0,1[$ et $p+q=1$.

$$\boxed{\text{D'après le cours, } Y \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}(\tfrac{1}{1+\theta})}$$

Toujours d'après le cours, $E(Y) = \frac{1}{p} = 1+\theta$ et $V(Y) = \frac{q}{p^2} = \dfrac{\theta}{1+\theta}(1+\theta)^2 = \theta(1+\theta)$.

$E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = \boxed{\theta}$; $V(X) = V(Y-1) = V(Y) = \boxed{\theta(1+\theta)}$

2–b)

Question hors programme.

3–a)

$$\begin{aligned}
\ln(L(\theta)) &= \ln \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(P(X_k = x_k)) \quad \text{car } \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X_k = x_k) > 0\\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{x_k}) \quad \text{car } \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X_k = x_k) = P(X = x_k) = u_{x_k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \frac{1}{1+\theta} + \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right) \quad \text{car } \frac{1}{1+\theta} \text{ et } \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k} > 0\\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{1+\theta} + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\\
&= n \ln \frac{1}{1+\theta} + \sum_{k=1}^{n} x_k \ln(\frac{\theta}{1+\theta})\\
&= -n\ln(1+\theta) + \ln(\frac{\theta}{1+\theta}) \sum_{k=1}^{n} x_k\\
&= -n\ln(1+\theta) + (\ln\theta - \ln(1+\theta))S_n \quad \text{; en développant, on obtient}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln(L(\theta)) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)}$$

3–b)

D'après le texte, $\varphi(\theta) = \ln(L(\theta))$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble.

$$\begin{aligned}
\forall \theta > 0,\ \varphi'(\theta) &= \frac{S_n}{\theta} - \frac{S_n + n}{1+\theta}\\
&= \frac{S_n(1+\theta) - (S_n + n)\theta}{\theta(1+\theta)}\\
\varphi'(\theta) &= \frac{S_n - n\theta}{\theta(1+\theta)}
\end{aligned}$$

$\varphi'(\theta) \geq 0 \iff S_n - n\theta \geq 0$ (car le dénominateur est > 0) $\iff \theta \leq \dfrac{S_n}{n}$ (car $n > 0$). Posons $\widehat{\theta_n} = \dfrac{S_n}{n}$.

La fonction φ est croissante strictement sur $]0, \widehat{\theta_n}]$ et strictement décroissante sur $[\widehat{\theta_n}, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ admet un maximum au point } \widehat{\theta_n} = \frac{S_n}{n}}$$

$\forall \theta > 0,\ \varphi(\theta) = \ln(L(\theta)) \iff \forall \theta > 0,\ L(\theta) = \exp(\varphi(\theta))$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, la fonction L est maximale si et seulement si la fonction φ l'est.

$$\boxed{\widehat{\theta_n} \text{ est } \underline{\textbf{le}} \text{ réel en lequel } L \text{ prend sa valeur maximale}}$$

3–c)

Les variables X_i sont indépendantes, de même loi dépendant de θ.

La variable T_n est une fonction des variables X_i dont l'expression ne dépend pas de θ, donc T_n est un estimateur de θ.

D'après la linéarité de l'espérance, $E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}n\theta$ d'après la question 2–a), donc $E(T_n) = \theta$

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$$

3–d)

T_n étant sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance.

$$\begin{aligned} r_{T_n} &= V(T_n) = V(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}V(\sum_{k=1}^{n} X_k) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \quad \text{car les variables } X_k \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{n^2}nV(X) \quad \text{car les } X_k \text{ suivent la même loi que } X \end{aligned}$$

$$\boxed{r_{T_n} = \frac{\theta(1+\theta)}{n} \text{ ; donc } \lim_{n\to+\infty} r_{T_n} = 0}$$

PROBLEME

1–a)

Remarquons que $\max(x,t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad t \leq x \\ t & \text{si} \quad t \geq x \end{cases}$

Sur $]-\infty, x[$, $\max(x,t) = x$; donc $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en tant que fonction polynomiale constante ;

Sur $]x, +\infty[$, $\max(x,t) = t$; donc $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en tant que fonction polynomiale ;

$\max(x,x) = x$.

$\lim_{t\to x^-} \max(x,t) = \lim_{x\to x^-} x = x = \max(x,x)$; la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en x à gauche.

$\lim_{t\to x^+} \max(x,t) = \lim_{x\to x^+} t = x = \max(x,x)$; la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en x à droite.

Donc $t \mapsto \max(x,t)$ est continue en x.

La fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $]-\infty, x[$, sur $]x, +\infty[$ et en x.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ la fonction } t \mapsto \max(x,t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

1–b)

D'après la question précédente, l'intégrale $\int_0^1 \max(x,t)dt$ existe puisque la fonction que l'on intègre est continue sur $[0,1]$.

Si $x \leq 0$, on a $x \leq t$ puisque $t \in [0,1]$; donc $y = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Si $x \in]0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
y &= \int_0^x \max(x,t)dt + \int_x^1 \max(x,t)dt \\
&= \int_0^x xdt + \int_x^1 tdt \\
&= \Big[xt\Big]_0^x + \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_x^1 \\
&= x^2 + \frac{1-x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}
\end{aligned}$$

Si $x > 1$, on a $t \le 1 < x$, donc $y = \displaystyle\int_0^1 xdt = \Big[xt\Big]_0^1 = x$.

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

On a mis des inégalités larges car les expressions coïncident en 0 et en 1.

2)

X suit la loi géométrique de paramètre p, donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $\omega \in \Omega$.

D'après la question précédente, $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 \max(X(\omega), t)dt = X(\omega)$ puisque $X(\omega) \ge 1$.

X et Y sont définies sur le même espace probabilisé Ω (d'après l'énoncé) ;

$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = X(\omega)$, donc $\boxed{X = Y}$

3–a)

$\{(X=-1),(X=0),(X=1)\}$ étant un système complet d'événements,

$P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = 1$. Donc

$P(X=0) = 1 - P(X=-1) - P(X=1) = 1 - 2 \times \frac{1}{4}$.

$$\boxed{P(X=0) = \frac{1}{2}}$$

3–b)

Soit $\omega \in \Omega$. Utilisons la question 1–b).

Si $X(\omega) = -1$, alors $X(\omega) < 0$, donc $Y(\omega) = \frac{1}{2}$;

Si $X(\omega) = 0$, alors $X(\omega) \in [0,1]$, donc $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = X(\omega) = 1$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \{\tfrac{1}{2}, 1\}}$$

D'où la loi de Y.

$$\boxed{P(Y=1) = P(X=1) = \tfrac{1}{4} \text{ ; par suite, } P(Y=\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}}$$

3–c)

Hors programme.

4–a)

D'après la question 1–b), $x \in [0,1] \Longrightarrow y = \dfrac{x^2+1}{2}$.

Donc, $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \in [0,1[$, donc $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$. $\boxed{Y = \dfrac{X^2+1}{2}}$

4–b)

$0 \leq X < 1 \Longleftrightarrow 0 \leq X^2 < 1$ car l'application carrée est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; par suite $1 \leq X^2+1 < 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \dfrac{X^2+1}{2} < 1$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[}$$

4–c)

$$\begin{aligned}
\forall x \in [\tfrac{1}{2}, 1[, F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
&= P(\frac{X^2+1}{2} \leq x) \\
&= P(X^2 \leq 2x-1) \\
&= P(|X| \leq \sqrt{2x-1}) \quad \text{car la fonction racine carrée est strictement} \\
&\quad \text{croissante sur } \mathbb{R}_+, \text{ car } \sqrt{X^2} = |X| \text{ et } 2x-1 \geq 0 \text{ pour } x \geq \tfrac{1}{2} \\
&= P(-\sqrt{2x-1} \leq X \leq \sqrt{2x-1}) \\
&= P(0 \leq X \leq \sqrt{2x-1}) \quad \text{car } X \geq 0 \\
&= P(X \leq \sqrt{2x-1}) - P(X<0) \\
&= P(X\sqrt{2x-1}) \quad \text{car } X \geq 0
\end{aligned}$$

$$\forall x \in [\tfrac{1}{2}, 1[, F_Y(x) = F_X(\sqrt{2x-1})$$

Rappelons que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[}$, sa fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dans le cas présent $\frac{1}{2} \leq x < 1 \Longleftrightarrow 1 \leq 2x < 2 \Longleftrightarrow 0 \leq 2x-1 < 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \sqrt{2x-1} < 1$. Par conséquent, $F_X(\sqrt{2x-1}) = \sqrt{2x-1}$.

$$\boxed{\forall x \in [\tfrac{1}{2}, 1[, F_Y(x) = \sqrt{2x-1}}$$

4–d)

Puisque $Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, 1[$,, la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x-1} & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

Remarquons que l'on peut mettre des inégalités larges car les expressions concernées coïncident pour $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

F_Y est une fonction de répartition, on a déjà les propriétés suivantes

$$\begin{cases} F_Y \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} F_Y(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F_Y(x) = 1 \end{cases}$$

De plus, F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$ comme fonction constante.

Sur $]\frac{1}{2}, 1[$: $x \mapsto 2x-1$ est de classe C^1 et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, $x \mapsto \sqrt{2x-1}$ est de classe C^1 sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

Donc F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2},1\}$. Par conséquent F_Y est continue sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2},1\}$.

$F_Y(\frac{1}{2})=0$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} 0 = 0 = F_Y(\frac{1}{2})$. F_Y est continue au point $\frac{1}{2}$ à gauche.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \sqrt{2x-1} = 0 = F_Y(\frac{1}{2})$. F_Y est continue au point $\frac{1}{2}$ à droite.

Donc F_Y est continue au point $\frac{1}{2}$.

$F_Y(1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{2x-1} = 1 = F_Y(1)$. F_Y est continue au point 1 à gauche.

$\lim\limits_{x\to 1^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = F_Y(\frac{1}{2})$. F_Y est continue au point 1 à droite.

Donc F_Y est continue au point 1.

Finalement, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

> F_Y est une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2},1\}$.
>
> Y est une variable aléatoire à densité

4–e)

$Y=\dfrac{X^2+1}{2}$. La variable X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, elle admet donc une variance et par conséquent un moment d'ordre 2. Par suite, Y admet une espérance et par linéarité de l'espérance,

$E(Y)=\frac{1}{2}E(X^2)+\frac{1}{2}$.

Rappelons que $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 \iff E(X^2)=V(X)+(E(X))^2$. Or $V(X)=\frac{1}{12}$; $E(X)=\frac{1}{2}$, donc

$E(X^2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$. $\boxed{E(Y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}}$

4–f)

Hors programme.

5–a)

Soit $\omega\in\Omega$; posons $x=X(\omega)$ et utilisons les résultats de la question 1–b).

$x\le 0 \iff Y(\omega)=\frac{1}{2}$;

$0<x\le 1 \iff Y(\omega)=\dfrac{x^2+1}{2}$; de plus $0<x\le 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}<\dfrac{x^2+1}{2}\le 1$ (voir 4–b).

$x>1 \iff Y(\omega)=x>1$.

Par suite $Y(\Omega)=\{\frac{1}{2}\}\cup]\frac{1}{2},1]\cup]1,+\infty[$

$$\boxed{Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}$$

5–b)

$P(Y=\frac{1}{2})=P(X\le 0)=\Phi(0)$ où Φ est la fonction de répartition de X (qui suit la loi normale centrée réduite).

$$\boxed{\text{D'après le cours, } P(Y=\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}}$$

5–c)

$Y(\Omega)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, donc

- $\forall x<\frac{1}{2},\ F_Y(x)=0.$
- • Si $x\geq\frac{1}{2}$. Utilisons le système complet d'événements

$$\{(X\leq 0),(0<X\leq 1),(X\geq 1)\}.$$
$$P(Y\leq x)=P(Y\leq x\cap X\leq 0)+P(Y\leq x\cap 0<X\leq 1)+P(Y\leq x\cap X>1)$$

Utilisons les résultats de la question 5–a)

$$\begin{aligned}P(Y\leq x)&=P(Y\leq x\cap Y=\tfrac{1}{2})+P(\frac{X^2+1}{2}\leq x\cap 0<X\leq 1)+P(Y\leq x\cap X=Y>1)\\&=P(Y\leq x\cap Y=\tfrac{1}{2})+P(X^2\leq 2x-1\cap 0<X\leq 1)+P(Y\leq x\cap X=Y>1)\\&=P(Y\leq x\cap Y=\tfrac{1}{2})+P(|X|\leq\sqrt{2x-1}\cap 0<X\leq 1)+P(Y\leq x\cap X=Y>1)\\&\quad\text{car } x\geq\frac{1}{2}\Longrightarrow 2x-1\geq 0\end{aligned}$$

D'où la relation **(5c)**

$$P(Y\leq x)=P(Y\leq x\cap Y=\tfrac{1}{2})+P(0<X\leq\sqrt{2x-1}\cap 0<X\leq 1)+P(Y\leq x\cap X=Y>1)$$

Remarquons que $\frac{1}{2}\leq x\Longrightarrow(Y=\frac{1}{2})\subset(Y\leq x)$, donc $(Y\leq x\cap Y=\frac{1}{2})=(Y=\frac{1}{2})$.

La relation (5c) devient

$$P(Y\leq x)=P(Y=\tfrac{1}{2})+P(0<X\leq\sqrt{2x-1}\cap 0<X\leq 1)+P(Y\leq x\cap X=Y>1)\qquad\textbf{(5c1)}$$

$*$ Supposons $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$.

$\frac{1}{2}\leq x\leq 1\Longleftrightarrow 1\leq 2x\leq 2\Longleftrightarrow 0\leq 2x-1\leq 1\Longleftrightarrow 0\leq\sqrt{2x-1}\leq 1.$

Donc $(0<X\leq\sqrt{2x-1})\subset(0<X\leq 1)$ et par suite
$(0<X\leq\sqrt{2x-1}\cap 0<X\leq 1)=(0<X\leq\sqrt{2x-1})$.
$x\leq 1\Longrightarrow(Y=x)\cap(X=Y>1)=\emptyset$.
La relation (5c1) devient

$$\begin{aligned}P(Y\leq x)&=P(Y=\tfrac{1}{2})+P(0<X\leq\sqrt{2x-1})\\&=P(Y=\tfrac{1}{2})+\Phi(\sqrt{2x-1})-\Phi(0)\\P(Y\leq x)&=\Phi(\sqrt{2x-1})\quad\text{car } P(Y=\tfrac{1}{2})=\Phi(0)=\tfrac{1}{2}\text{ d'après 5–b)}\end{aligned}$$

$**$ Supposons $x>1$.
$x>1\Longleftrightarrow 2x-1>1$, donc $(0<X\leq 1)\subset(0<X\leq\sqrt{2x-1})$.
Par suite $(0<X\leq\sqrt{2x-1}\cap 0<X\leq 1)=(0<X\leq 1)$.
$(Y\leq x\cap Y=X>1)=(1<X\leq x)$.
La relation (5c1) devient

$$\begin{aligned}P(Y\leq x)&=P(Y=\tfrac{1}{2})+P(0<X\leq 1)+P(1<X\leq x)\\&=\Phi(0)+\Phi(1)-\Phi(0)+\Phi(x)-\Phi(1)\\P(Y\leq x)&=\Phi(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{F_Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad x<\frac{1}{2}\\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si}\quad \frac{1}{2}\leq x\leq 1\\ \Phi(x) & \text{si}\quad x>1\end{cases}}$$

5–d)

Si Y est à densité, $\forall a \in \mathbb{R},\ P(Y = a) = 0$. Or $P(Y = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

La variable Y n'est pas à densité.

$Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, +\infty[$; c'est un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point : ce n'est pas un ensemble dénombrable.

La variable Y n'est pas discrète.