ECRICOME
VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2014

2

Mathématiques

Option Economique

Mercredi 16 avril 2014 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page s.v.p.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1).$$

On note $\ker(f)$ le noyau de f et $\operatorname{Im}(f)$ son image.

Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

PARTIE I : Réduction de l'endomorphisme f.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$.

2. Justifier que f n'est pas bijectif. En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f.

3. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f.

   Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).

   Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v.$$

6. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, tel que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PARTIE II : Résolution d'une équation.

Dans les questions 1, 2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f.$$

1. Montrer que :

$$f \circ g = g \circ f.$$

   En déduire que :

$$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v).$$

2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
3. On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question **I.6.** Justifier que :

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

   où a et b sont les deux réels définis à la question précédente **(II.2)** et c, d, e des réels.
4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$? **Indication** : *utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question* **I.6.**

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.
2. Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.

3. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
4. Etablir que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
5. Donner le développement limité à l'ordre de 2 au voisinage de 0 de

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

6. Prouver que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
7. Etablir que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1.$$

En déduire que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

8. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n.$$

9. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

EXERCICE 3

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0, 1[$, on note $q = 1 - p$.

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.

PARTIE I : Etude d'une première expérience.

On procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ».

On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : « la pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

« FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE »

alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Simulation informatique.
   (a) Ecrire une fonction en Turbo-Pascal d'en-tête :

   function LANCER (p : real) : integer;

   qui crée un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0, 1]$ et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à p et 0 sinon.

   (b) Ecrire une fonction en Turbo-Pascal d'en-tête :

   function PREMIER_PILE (p : real) : integer;

   qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier pile et renvoie le nombre de lancers effectués. **Indication** : *si on souhaite, on pourra utiliser la fonction LANCER en la répétant convenablement.*

   (c) Ecrire un programme en Turbo-Pascal qui demande un réel p à l'utilisateur, puis qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second pile et affiche le nombre de faces obtenus en tout. **Indication** : *on pourra utiliser la fonction PREMIER_PILE en la répétant convenablement.*

2. Soit n un entier naturel non nul. Donner la loi de X_n. Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.

3. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

4. Donner la valeur des probabilités :

$$P(Y = 0), \quad P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P(Y = 2).$$

5. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements :

$$(Y = n) \quad \text{et} \quad (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$$

sont égaux.

6. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y=n) = (n+1)\, p^2 q^n.$$
7. Vérifier par le calcul que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = 1.$$
8. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.
9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

   En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

PARTIE II : Etude d'une seconde expérience.

On procède à l'expérience suivante :

$\mathcal{F}$: « *Deux joueurs se relaient pour effectuer des lancers successifs de la pièce pendant la pause déjeuner.*

Le joueur 1 arrive à 12h (considéré comme l'instant 0) et joue jusqu'à l'arrivée du joueur 2.

Le joueur 2 arrive au hasard entre 12h et 13h puis joue jusqu'à 13h exactement (qui est considéré comme l'instant 1). »

On note :

- R la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 1 ;
- S la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 2 ;
- T la variable aléatoire égale à la durée (en heure) de jeu effectuée par le joueur ayant joué le plus longtemps c'est-à-dire que :
$$T = \max(R, S).$$

Pour toute variable aléatoire X, on note F_X la fonction de répartition de X.

On admet que R et S sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant l'expérience $\mathcal{F}$. En outre, on suppose que :

$$\boxed{R \text{ suit la loi uniforme sur } [0,1] \text{ et que } S = 1 - R.}$$

(*cette dernière relation traduisant que le temps total consacré au jeu par le joueur 1 et le joueur 2 est exactement d'une heure*).

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

1. Expliciter la fonction F_R puis la fonction F_S. Reconnaitre alors la loi suivie par la variable aléatoire S.

2. Pour tout réel t, prouver que :

$$P(T \leqslant t) = P((R \leqslant t) \cap (R \geqslant 1 - t)).$$

3. Déterminer, pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, l'expression de $F_T(t)$ en fonction de t.

4. Justifier que T suit la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

5. En déduire que T admet une espérance $E(T)$ et une variance $V(T)$ que l'on précisera.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

ECRICOME 2014 VOIE E

CORRIGE

Le langage Pascal n'étant plus au programme, nous n'avons pas traité les questions d'informatique.

EXERCICE I

PARTIE I : réduction de l'endomorphisme f

1)

- Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$w \in \operatorname{Ker} f \iff f(w) = 0 \iff AX = (0)$$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ x + 2y + z & = 0 \\ 2x - 2y - z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ 2y + z & = 0 \end{cases} \quad \text{puisque } x = 0$$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ z & = -2y \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = \{w = (0, y, -2y) \in \mathbb{R}^3,\ y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}((0, 1, -2)) = \operatorname{vect}(u)$. Le vecteur u n'est pas nul, donc la famille (u) est libre et par conséquent

$$\boxed{\text{le vecteur } u = (0, 1, -2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f \ : \ \dim \operatorname{Ker} f = 1}$$

- Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est A. D'après le cours,

$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{vect}((1, 1, 2), (0, 2, -2), (0, 1, -1)) = \operatorname{vect}((1, 1, 2), (0, 1, -1))$ car $(0, 2, -2) = 2(0, 1, -1)$.

Les vecteurs $(1, 1, 2)$ et $(0, 1, -1)$ forment une famille libre car ils ne sont pas proportionnels, par conséquent

$$\boxed{\text{la famille } ((1, 1, 2), (0, 1, -1)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f \ : \ \dim \operatorname{Im} f = 2}$$

Remarque : le théorème du rang donnait tout de suite $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Par suite la famille $((1, 1, 2), (0, 1, -1))$ est génératrice d'un espace de dimension 2, c'en est donc une base.

2)

D'après la question 1), $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. D'après le cours, $\operatorname{Ker} f \neq \{0\} \iff f$ non injective. Donc f n'est pas bijective (on peut d'ailleurs remarquer que ces deux propriétés sont équivalentes, car la dimension de $\mathbb{R}^3$ est finie).

Or $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f - 0.\operatorname{Id})$ où Id est l'application identique de $\mathbb{R}^3$.

On a donc $\operatorname{Ker}(f - 0.\operatorname{Id}) \neq \{0\}$ ce qui veut dire

$$\boxed{\text{Le réel } 0 \text{ est valeur propre de } f}$$

3)

- D'après la question 1), $\operatorname{Ker} f = E_0(f) = \operatorname{vect}(u)$. Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur $\lambda = 0$.

- Un calcul facile donne $f(v) = v$. Le vecteur v est un vecteur propre de f associé à la valeur $\mu = 1$.

- $E_0(f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(u)$: $\boxed{\dim E_0(f) = 1}$

- Déterminons $E_1(f)$. Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
w \in E_1(f) \quad & = f(w) = w \iff AX = X \\
& \iff \begin{cases} x & = x \\ x + 2y + z & = y \\ 2x - 2y - z & = z \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x - 2y - 2z & = 0 \end{cases} \quad \text{effectuons } L_2 \longleftarrow \frac{1}{4}(L_2 + 2L_1) \\
& \iff \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ z & = -y \end{cases}
\end{aligned}$$

$E_1(f) = \{w = (0, y, -y) \in \mathbb{R}^3,\ y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}((0, 1, -1))$.

$$\boxed{E_1(f) = \operatorname{vect}(v) \,:\, \dim E_1(f) = 1}$$

4)

Cherchons si f admet une valeur propre α autre que 0 et 1, c'est-à-dire cherchons $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Avec les notations précédentes,

$$f(w)=\alpha w \iff \begin{cases} x &= \alpha x\\ x+2y+z &= \alpha y\\ 2x-2y-z &= \alpha z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1-\alpha)x &= 0\\ x+(2-\alpha)y+z &= 0\\ 2x-2y-(1+\alpha)z &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 0\\ (2-\alpha)y+z &= 0\\ -2y-(1+\alpha)z &= 0\end{cases} \quad \text{car } \alpha\neq 1, \text{ effectuons } L_2 \longleftarrow 2L_2+(2-\alpha)L_3$$

$$\iff \begin{cases} x &= 0\\ (2-(1+\alpha)(2-\alpha))z &= 0\\ -2y-(1+\alpha)z &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 0\\ \alpha(-1+\alpha)z &= 0\\ -2y-(1+\alpha)z &= 0\end{cases}$$

Or $\alpha(-1+\alpha)\neq 0$, donc ce système équivaut à $x=y=z=0$. Il n'y a pas de valeurs propres de f différentes de 0 et de 1.

Conclusion : le spectre de f est $\{0,1\}$.

$$\boxed{\operatorname{spect} f=\{0,1\}\ ;\ \dim E_0(f)+\dim E_1(f)=2\neq\dim\mathbb{R}^3, \text{ donc } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

5)

D'après les calculs de la question 3),

$$f(t)=t+v \iff \begin{cases} x &= x+0\\ x+2y+z &= y+1\\ 2x-2y-z &= z-1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z &= 1\\ 2x-2y-2z &= -1\end{cases} \quad \text{on effectue } L_2\longleftarrow \frac{1}{4}(L_2+2L_1)$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z &= 1\\ x &= \frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{4}\\ y+z &= \frac{3}{4}\end{cases}$$

$$\boxed{f(t)=t+v \iff \exists\, y\in\mathbb{R}\ /\ t=(\tfrac{1}{4},y,\tfrac{3}{4}-y)}$$

6)

Le vecteur w demandé est $w=(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0)$ obtenu pour $y=\frac{3}{4}$.

- Regardons si la famille (u,v,w) est libre. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ xu+yv+zw=(0,0,0)$. Cette égalité équivaut successivement aux systèmes

$$\begin{cases} \frac{1}{4}z & = 0 \\ x+y+\frac{3}{4}z & = 0 \\ -2x-y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z & = 0 \\ x+y & = 0 \\ -2x-y & = 0 \end{cases} \text{ on effectue } L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\iff \begin{cases} z & = 0 \\ x+y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z \quad = 0$$

$\boxed{\text{La famille } (u,v,w) \text{ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 : la famille } (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

La matrice de f dans cette base est donnée par :

$f(u) = (0,0,0) = 0.u = 0.u + 0.v + 0.w$; $f(v) = v = 1.v = 0.u + 1.v + 0.w$;

$f(w) = w + v = 0.u + 1.v + 1.w$. D'où

$$\boxed{\mathrm{Mat}_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T}$$

PARTIE II : résolution d'une équation

1)

- $f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g)$ (par associativité) $= g \circ f$. Donc
- $f(g(u)) = (f \circ g)(u) = (g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(0,0,0) = (0,0,0)$
- $f(g(v)) = (f \circ g)(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(v)$.

2)

- $f(g(u)) = (0,0,0) \iff g(u) \in \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} f = \mathrm{vect}(u)$ d'après la question I.1), donc
$$\exists\, a \in \mathbb{R} \ / \ g(u) = a.u$$
- $f(g(v)) = g(v) \iff g(v) \in E_1(f)$. Or $E_1(f) = \mathrm{vect}(v)$ d'après la question I.3), donc
$$\exists\, b \in \mathbb{R} \ / \ g(v) = b.v$$

3)

$g(u) = a.u$ et $g(v) = b.v$ donnent les deux premières colonnes de la matrice N de g dans la base C. On ne sait rien de particulier du vecteur $g(w)$, si ce n'est qu'il appartient à $\mathbb{R}^3$, donc qu'il s'exprime dans la base C : il existe $(c,d,e) \in \mathbb{R}^3 \ / \ g(w) = c.u + d.v + e.w$. En conséquence,

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}}$$

4)

Si g existe, alors $g \circ g = f \iff N^2 = T$. Un calcul facile donne $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c(a+e) \\ 0 & b^2 & d(b+e) \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$

$$N^2 = T \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & c(a+e) \\ 0 & b^2 & d(b+e) \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a & = 0 \\ b^2 & = 1 \\ c(a+e) & = 0 \\ d(b+e) & = 1 \\ e^2 & = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = 0 \\ b & = \pm 1 \\ ce & = 0 \quad \text{car } a = 0 \\ d(b+e) & = 1 \\ e & = \pm 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = 0 \\ b & = \pm 1 \\ c & = 0 \quad \text{car } e \neq 0 \\ d(b+e) & = 1 \\ e & = \pm 1 \end{cases}$$

L'équation $d(b+e) = 1 \Longrightarrow b + e \neq 0$; les équations 2 et 5 donnent : $b = e = 1$ ou $b = e = -1$.

- Si $b = e = 1$, le système précédent devient $\begin{cases} a & = 0 \\ b & = 1 \\ c & = 0 \\ 2d & = 1 \\ e & = 1 \end{cases}$ Donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si $b = e = -1$, le système précédent devient $\begin{cases} a & = 0 \\ b & = -1 \\ c & = 0 \\ -2d & = 1 \\ e & = -1 \end{cases}$: $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Conclusion : il y a deux solutions g de matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $-g$ (de matrice $-N$)

$$\boxed{\text{L'équation } g \circ g = f \text{ admet deux solutions exactement : elles sont d'ailleurs opposées}}$$

EXERCICE II

1)

$\forall x > 0,\ \ln(1+x) > 0$, donc $f(x) > 0$. Pour $x = 0,\ f(0) = 1$, donc

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) > 0$$

Procédons par récurrence ; notons P_n la propriété $\ll u_n$ existe et $u_n > 0 \gg$.

- Pour $n = 0,$, u_0 existe et $u_0 > 0$ puisque $u_0 = e$.
- Hérédité : supposons que P_n soit satisfaite pour un entier naturel n donné.

u_n existe et $u_n > 0$ implique $f(u_n)$ existe et $f(u_n) > 0$ d'après ce que nous venons de voir. Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$. La propriété P_{n+1} est satisfaite. L'hérédité est établie et par principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 0}$$

2)

Hors programme

3)

i) La fonction $x \mapsto 1+x$ est continue sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus sur cet intervalle $\ln(1+x)>0$ puisque $1+x>1$. Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

ii) D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1=f(0)$. La fonction f est continue en 0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]0,+\infty[\ ;\ f \text{ est continue en } 0, \text{ donc } f \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$$

4)

La même démonstration que dans 3–i), en changeant l'adjectif continue en de classe C^1, prouve que

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$$

5)

- $$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.\\ \frac{x}{1+x} &= x\frac{1}{1+x}=x(1-x+x\varepsilon_1(x))\\ &= x-x^2+x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0.\\ \ln(1+x)-\frac{x}{1+x} &= x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-(x-x^2+x^2\varepsilon_1(x))\\ &= x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-x+x^2-x^2\varepsilon_1(x)\\ &= \frac{x^2}{2}+x^2\beta(x) \quad \text{avec } \beta(x)=\varepsilon(x)-\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \forall x>0,\ f'(x) &= \frac{\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}\\ &= \frac{\dfrac{x^2}{2}+x^2\beta(x)}{(\ln(1+x))^2} \quad \text{d'après le point précédent}\\ f'(x) &\underset{0}{\sim} \frac{\dfrac{x^2}{2}+x^2\beta(x)}{x^2} \quad \text{car } \ln(1+x)\underset{(0)}{\sim} x\\ &\underset{(0)}{\sim} \frac{1}{2}+\beta(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)\underset{(0)}{\sim}\frac{1}{2}}$$

6)

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)=\frac{1}{2}$; d'après le théorème dit du prolongement des applications de classe C^1, on déduit

$$\boxed{f \text{ est dérivable au point } x=0\ ;\ f'(0)=\frac{1}{2} \text{ et } f' \text{ est continue au point } x=0}$$

7)

- Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\ln(1+x)}$.

$x \geq e-1 \iff x+1 \geq e \iff \ln(1+x) \geq \ln e$ (par la stricte croissance de la fonction ln), donc
$x \geq e-1 \iff \ln(1+x) \geq 1$ et pour finir $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \leq 1$ puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par suite $x \geq e-1 \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x} \leq 1$. En multipliant cette inégalité par $x > 0$, on obtient

$$\boxed{\forall x \geq e-1,\ f(x) \leq x}$$

- $$\begin{aligned} x \geq e-1 &\iff \ln(x+1) \geq 1 \quad \text{vu dans le point précédent} \\ &\iff (x+1)\ln(x+1) \geq x+1 \quad \text{car } x+1>0 \\ &\iff (x+1)\ln(x+1) - x \geq 1 \\ \text{Or } f'(x) &= \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x+1} \quad \text{donc} \\ f'(x) &\geq \frac{1}{x+1} \quad \text{car } x+1>0 \end{aligned}$$

On en conclut : $\boxed{\forall x \geq e-1,\ f'(x) > 0}$

Remarquons que cela implique que la fonction f est croissante sur $[e-1, +\infty[$.

8)

Soit P_n la propriété : $u_n \geq e-1$. Montrons cette propriété par récurrence.
Pour $n = 0$; $u_0 = e \geq e-1$: la propriété est satisfaite pour $n = 0$.
Hérédité ; supposons la propriété P_n satisfaite pour un entier naturel n donné.
$u_n \geq e-1 \Longrightarrow f(u_n) \geq f(e-1)$ d'après la remarque de la question 7).
Or $f(e-1) = \dfrac{e-1}{\ln(e-1+1)} = e-1$, donc $u_{n+1} \geq e-1$.
La propriété est satisfaite pour $n+1$; elle est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq e-1}$$

9)

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq e-1 \Longrightarrow f(u_n) \leq u_n$ d'après la question 7), c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par $e-1$. D'après le théorème des suites monotones, bornée,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers un réel } L \geq e-1}$$

La fonction f est continue sur $[e-1, +\infty[$ puisque $[e-1, +\infty[\subset [0, +\infty[$.
Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ et $L \in [e-1, +\infty[\Longrightarrow f(L) = L$.

$$\begin{aligned} f(L) = L &\iff \frac{L}{\ln(L+1)} = L \quad \text{car } L \neq 0 \\ &\iff \frac{1}{\ln(L+1)} = 1 \quad \text{même argument} \\ &\iff \ln(L+1) = 1 \iff L+1 = e \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers le réel } L = e-1}$$

EXERCICE III

PARTIE I : étude d'une première expérience

1–a)

Hors programme.

1–b)

Hors propgramme.

1–c)

Hors programme.

2)

On effectue n épreuves de Bernoulli (lancer d'une pièce de monnaie), indépendantes, identiques ; le succès S est l'obtention de PILE et l'echec $\overline{S}$ est l'obtention de FACE. Le paramètre de chacune de ces épreuves de Bernoulli est $p = P(S)$.

La variable X_n indique le nombre de succès obtenus à l'issue des n lancers. D'après le cours,

$$\boxed{\begin{gathered} X_n \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n, p : X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p \\ E(X_n) = np \text{ et } V(X_n) = npq \end{gathered}}$$

3)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement " au n ème lancer , on a obtenu face " et P_n l'événement " au n ème lancer on a obtenu pile ".

L'événement $(Y = 0)$ est l'événement P_1P_2.

L'événement $(Y = n)$ est réalisé si, par exemple on a obtenu $P_1 \cap F_2 \dots F_{n+1}P_{n+2}$. Donc $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Or il est clair que Y ne peut prendre que des valeurs entières positives ou nulles, donc $\boxed{Y(\Omega) = N}$

3)

Par indépendance des lancers, $P(Y = 0) = P(P_1P_2) = P(P_1)P(P_2)$.

$$\boxed{P(Y = 0) = p^2}$$

4)

$$\begin{aligned} (Y = 1) &= (P_1F_2P_3) \cup (F_1P_2P_3) \quad \text{union d'événements incompatibles, donc} \\ P(Y = 1) &= P(P_1F_2P_3) + P(F_1P_2P_3) \quad \text{puis, par indépendance des lancers} \\ &= 2qp^2 \\ (Y = 2) &= (F_1F_2P_3P_4) \cup (F_1P_2F_3P_4) \cup (P_1F_2F_3P_4) \quad \text{union d'événements 2 à 2} \\ &\quad \text{incompatibles, donc} \\ P(Y = 1) &= P(F_1F_2P_3P_4) + P(F_1P_2F_3P_4) + P(P_1F_2F_3P_4) \quad \text{indépendance des lancers} \\ &= 3q^2p^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y = 1) = 2p^2q\ ;\ P(Y = 2) = 3p^2q^2}$$

5)

Remarquons que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le nombre de lancer nécessaires pour réaliser $(Y = n)$ est $n + 2$ (il faut 2 pile et n face).

Remarquons que le dernier lancer (le $(n+2)^{\text{ème}}$) doit donner pile et remarquons pour finir que les $n+1$ premiers lancers doivent donner un pile et n face (quel que soit l'ordre d'apparition de ces $n+1$ résultats) ; cela veut dire qu'au cours des $n+1$ premiers lancers on a obtenu exactement un pile. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (Y=n) = (X_{n+1}=1) \cap P_{n+2}}$$

6)

Les lancers étant indépendants, le $(n+2)^{\text{ème}}$ est indépendant de toute fonction des $n+1$ premiers lancers. Donc le $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer est indépendant de la variable X_{n+1}.

P_{n+2} est indépendant de l'événement $(X_{n+1}=1)$

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P(X_{n+1}=1) \times P(P_{n+2}) \qquad \text{or } X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1,p) \text{ (voir 2)), donc} \\ &= \binom{n+1}{1} pq^n \times p \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y=n) = (n+1)q^n p^2}$$

7)

Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n p^2 \\ &= p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n \qquad \text{on pose } n+1=k \\ &= p^2 \sum_{1}^{+\infty} kq^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnait la somme des termes de la dérivée première de la série géométrique de raison $q \in]0,1[$. Cette série converge d'après la cours et $\sum_{1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p^2}$, donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = p^2 \times \frac{1}{p^2} = 1}$$

Remarque : en toute rigueur, ce n'est que maintenant que nous pouvons affirmer que Y est une variable aléatoire discrète telle que $Y(\Omega)=\mathbb{N}$. L'événement " le deuxième pile arrive " est l'événement $\bigcup_{n=0}^{+\infty}(Y=n)$. On en conclut que le deuxième pile arrive donc avec une probabilité égale à 1. C'est un événement quasi-certain.

8)

$E(Y)$ existe si et seulement si la série de terme général $nP(Y=n)$ est absolument convergente ; les termes étant positifs, la convergence suffit.

$nP(Y=n) = n(n+1)p^2q^n = p^2q\Big(n(n+1)q^{n-1}\Big)$. On reconnait, dans $n(n+1)q^{n-1}$ le terme général de la dérivée seconde de la série géométrique de terme général q^{n+1}. Cette série est convergente car $0<q<1$.

La série de terme général $p^2q\Big(n(n+1)q^{n-1}\Big)$ converge donc $E(Y)$ existe.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= p^2q\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)q^{n-1} \\
&= p^2q\sum_{\underline{n=1}}^{+\infty} n(n+1)q^{n-1} \quad \text{le terme pour } n=0 \text{ est nul} \\
& p^2q\sum_{N=2}^{+\infty} N(N-1)q^{N-2} \quad (\text{on a posé } N=n+1) \\
&= p^2q\frac{2}{(1-q)^3} = p^2q\frac{2}{p^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y)=\frac{2q}{p}}$$

9)

On établit, comme au 3), que $Y_k(\Omega)=\mathbb{N}$ (on peut obtenir $(Y=n)$ en ayant d'abord n face, puis k pile).

Raisonnons maintenant comme au 5) ;

Pour réaliser $(Y_k = n)$ il faut (et il suffit) que $n+k$ lancers aient eu lieu, que le dernier lancer donne pile et que, dans les $n+k-1$ premiers lancers, on ait obtenu exactement $k-1$ pile (peu importe leur rang d'apparition). Ce dernier événement est $(X_{n+k-1}=k-1)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ (Y_k=n)=(X_{n+k-1}=k-1)\cap P_{n+k}}$$

En raisonnant enfin comme à la question 6), on prouve que

$\forall n\in\mathbb{N},\ P(Y_k=n)=\binom{n+k-1}{k-1}p^{k-1}q^{n+k-1-(k-1)}$ car $X_{n+k-1}\hookrightarrow\mathcal{B}(n+k-1,p)$. Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(Y_k=n)=\binom{n+k-1}{k-1}p^{k-1}q^{n}}$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

PARTIE II : étude d'une seconde expérience

1)

D'après le cours, puisque R suit la loi uniforme sur $[0,1]$,

$$\boxed{F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \ F_S(x) &= P(S \leq x) = P(1 - R \leq x) \\ &= P(R \geq 1 - x) \\ &= 1 - P(R < 1 - x) \\ &= 1 - P(R \leq 1 - x) \quad \text{car la variable } R \text{ est à densité} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_S(x) = 1 - F_R(1 - x)$$

$*$ Si $1 - x \leq 0$, ce qui équivaut à $x \geq 1$, $F_R(1 - x) = 0$, donc $F_S(x) = 1$.

$*$ Si $0 \leq 1-x \leq 1$, ce qui équivaut à $0 \leq x \leq 1$, $F_R(1-x) = 1-x$, donc $F_S(x) = 1-(1-x) = x$.

$*$ Si $1 - x \geq 1$, ce qui équivaut à $x \leq 0$, $F_R(1 - x) = 1$, donc $F_S(x) = 0$.

$$\boxed{F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad S \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}}$$

2)

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \ P(T \leq t) &= P(\max(R, S) \leq t) \\ &= P(R \leq t \cap S \leq t) \\ &= P(R \leq t \cap 1 - R \leq t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ P(T \leq t) = P(R \leq t \cap R \geq 1 - t)}$$

3)

$\forall t \in [0, \frac{1}{2}], \ F_T(x) = P(T \leq t) = P(R \leq t \cap R \geq 1 - t)$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq 1 - t \leq t \leq 1$; on a donc : $R \leq t \cap R \geq 1 - t \Longleftrightarrow 0 \leq 1 - t \leq R \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(0 \leq 1 - t \leq R \leq t \leq 1) \\ &= F_R(t) - F_R(1 - t) \\ &= t - (1 - t) = 2t - 1. \end{aligned}$$

$t < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1 - t > \frac{1}{2}$. On ne peut pas avoir $R \leq t$ et $R \geq 1 - t$, car on aurait a fortiori $R < \frac{1}{2}$ et $R > \frac{1}{2}$.

Donc $(R \leq t \cap R \geq 1 - t) = \emptyset$ et $P(R \leq t \cap R \geq 1 - t) = 0$. $F_T(t) = 0$.

Si $t > 1$.

Les événements $(R \leq t)$ et $(R \geq 1 - t)$ sont certains. En effet $R(\Omega) = [0,1]$; on a donc $R \leq 1 \leq t$ et, puisque $1 - t < 0$, on a bien $1 - t \leq 0 \leq R$.

Dans ces conditions, $F_T(t) = 1$.

En résumé,

$$\boxed{F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}}$$

4)

La fonction F_T est clairement de classe C^1 (donc continue) sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$, sur $]\frac{1}{2},1[$ et $]1,+\infty[$.

$F_T(\frac{1}{2})=0$.

$\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^-} F_T(t)=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^-} 0=0=F_T(\frac{1}{2})$; F_T est continue en $\frac{1}{2}$ à gauche.

$\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^+} F_T(t)=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^+} (2t-1)=0=F_T(\frac{1}{2})$; F_T est continue en $\frac{1}{2}$ à droite.

F_T est continue au point $\frac{1}{2}$

$F_T(1)=1$.

$\lim\limits_{t\to1^-} F_T(t)=\lim\limits_{t\to1^-} (2t-1)=1=F_T(1)$; F_T est continue en 1 à gauche.

$\lim\limits_{t\to1^+} F_T(t)=\lim\limits_{t\to1^+} 1=1=F_T(1)$; F_T est continue en 1 à droite.

F_T est continue au point 1

Conclusion : F_T est continue sur $\mathbb{R}$.

En résumé ; F_T est une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2},1\}$.

$$\boxed{\text{La variable } T \text{ est une variable à densité}}$$

On prendra pour densité f_T la fonction définie par $f_T(t)=F_T'(t)$ sur $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2},1\}$; $f_T(\frac{1}{2})=f_T(1)=2\cdot$ Ce qui donne

$$\boxed{f_T(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<\frac{1}{2} \\ 2 & \text{si} \quad \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t>1 \end{cases}}$$

On reconnait une densité d'une variable qui suit la loi uniforme sur $[\frac{1}{2},1]$.

5)

D'après le cours, si $X\hookrightarrow\mathcal{U}_{[a,b]}$, $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ et $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, donc

$$\boxed{E(T)=\frac{3}{4} \text{ et } V(T)=\frac{1}{48}}$$