ECRiCOME
VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2014

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 16 avril 2014 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = xP(x) + x\ln(x)\,Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right. .$$

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, ..., u_n, v_n)$ (*c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, ..., u_n, v_n$*).

   On admettra que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, ..., u_n, v_n)$ est une base de E.

2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.

3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.

4. Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?

6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. On suppose que λ est non nul et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x^{-1/\lambda}\int_0^x f(t)\,dt.$$

   Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ puis celle de f.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

7. Pour chaque valeur propre λ de φ, déterminer la dimension de l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

On admettra que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}dt.$$

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$L(x) = \ln(\Gamma(x)) \quad \text{et} \quad \Psi(x) = L'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

1. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente.
2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}$$
puis préciser la valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :
$$\forall (x,A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \left(\int_0^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt\right).$$
4. Démontrer que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad (\Gamma'(x))^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$$
puis justifier que la fonction Ψ est croissante sur $]0,+\infty[$.

Tournez la page s.v.p.

5. Soit $a \in]0,1[$.

 (a) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)\right) - \frac{1}{2a}\left(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)\right)$$

 et :

$$0 \leqslant \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

 (b) Etablir que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ en fonction de Ψ et de a.

PROBLEME

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0, 1]$).

   (a) Ecrire une fonction DUEL en Turbo-Pascal qui créé un nombre aléatoire et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et 0 sinon.

   (b) Ecrire une fonction TEST_VICTOIRE en Turbo-Pascal qui, à trois nombres a, b, c fournis par l'utilisateur, renvoie TRUE si les trois sont égaux, FALSE sinon.

   (c) Ecrire un programme TOURNOI en Turbo-Pascal simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté 3 victoires consécutives). **Indication** : *Si on souhaite, on pourra utiliser les fonctions DUEL et TEST_VICTOIRE en les répétant convenablement jusqu'à ce que TEST_VICTOIRE sur trois DUEL consécutifs renvoie TRUE.*

2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme d'un tableau de la forme suivante :

numéro
du joueur
gagnant
le duel
↓

duel 1	0	...
duel 2	0	...
duel 3	0	...

Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$(\mathcal{R}_1) : P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

PARTIE II : Etude du cas général.

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0, 1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1.$$

1. Pour tout entier $k \in \{1, .., N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ».

   Justifier l'égalité :

$$\forall n \geqslant N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

2. Etablir que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), .., P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geqslant N$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

   On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0.$$

6. A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$ (*question* **II**.2), établir que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Etablir la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ (*question* **II**.4) sur tous les entiers $n \geqslant N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

   (a) Soit $n \geqslant 2$. Justifier que les événements $\left(E_{n-1} \cap \overline{E_n}\right)$ et $(X = n)$ sont égaux.

   (b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie **II** sont conservées. Les résultats de la question **II.5**) pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1. On considère le polynôme :

$$R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$$

   et on admet que :

$$(qX - 1)\,Q(X) = R(X) \quad \text{et} \quad XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N.$$

   Soit z un complexe tel que

$$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0.$$

Tournez la page s.v.p.

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

Par conséquent chaque racine complexe de Q est de multiplicité 1 donc, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $N-1$ complexes non nuls et distincts $z_1, .., z_{N-1}$ tels que :

$$Q(X) = (X - z_1) \cdots (Z - z_{N-1}).$$

2. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}_{N-2}[X] & \to \quad \mathbb{C}^{N-1} \\ S & \mapsto \quad \left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), .., S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) \end{cases}$$

où $z_1, .., z_{N-1}$ sont les $N-1$ racines distinctes de Q.

(a) Prouver que f est un isomorphisme.

(b) Ecrire sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbb{C}^{N-1}$. Expliciter ${}^tA$ (*la transposée de* A).

(c) En déduire que le système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1 + \cdots + x_{N-1} = P(E_1) \\ \dfrac{x_1}{z_1} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{z_{N-1}} = P(E_2) \\ \vdots \\ \dfrac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} = P(E_{N-1}) \end{cases}$$

admet une unique solution $(\alpha_1, .., \alpha_{N-1})$.

3. Soient $(\alpha_1, ... \alpha_{N-1})$ l'unique solution du système $(\mathcal{S})$ (cf. question **III.2c**). on considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{(z_{N-1})^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(E_n) = u_n.$$

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

ECRICOME 2014 VOIE S

CORRIGE

Le langage Pascal n'étant plus au programme, nous n'avons pas traité les questions d'informatique.

EXERCICE I

1)

$\forall f \in E,\ \exists\,(P,Q) \in \left(\mathbb{R}_{n-1}[X]\right)^2\ /\ \forall x>0,\ f(x) = xP(x) + xQ(x)\ln x.$

$*\ \exists\,(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\ /\ P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$

$*\ \exists\,(b_0,\ldots,b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\ /\ Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k.$

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1}\ln x\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} x^{k} + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} x^{k}\ln x\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} u_k(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} v_k(x)\\ &= (\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} u_k + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} v_k)(x)\end{aligned}$$

Donc $\forall f \in E,\ f = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}u_k + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}v_k\ :\ f \in \mathrm{vect}(u_1,v_1,u_2,v_2,\ldots,u_n,v_n).$

L'inclusion réciproque est évidente, donc

$$\boxed{E = \mathrm{vect}(u_1,v_1,u_2,v_2,\ldots,u_n,v_n)}$$

2)

Par croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 puisque sa limite y est réelle.

- $\forall x>0,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ (\varphi(u_k))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k dt = \frac{1}{x}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}u_k(x).$

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k$$

• $\forall x > 0,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ (\varphi(v_k))(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^k \ln t dt$. L'intégrale est impropre en 0 uniquement puisque $t \mapsto t^k \ln t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque $k > 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} t^k \ln t = 0$ par croissances comparées, l'intégrale est faussement impropre, donc convergente.

En conclusion $\forall x > 0,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ (\varphi(v_k))(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^k \ln t dt$ existe.

Calcul : soit $I(a) = \displaystyle\int_a^x t^k \ln t dt$ pour $a > 0$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Faisons une intégration par parties :

$u'(t) = t^k \Longleftarrow u(t) = \dfrac{1}{k+1}t^{k+1}$; $v(t) = \ln t \Longrightarrow v'(t) = \dfrac{1}{t}\cdot$ Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned}
I(a) &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_a^x - \frac{1}{k+1}\int_a^x t^k dt \\
&= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x - \frac{a^{k+1}}{k+1}\ln a - \frac{1}{(k+1)^2}(x^{k+1} - a^{k+1}) \\
\lim_{a\to 0^+} I(a) &= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x - \frac{1}{(k+1)^2}x^{k+1} \quad \text{car } \lim_{a\to 0^+} a^{k+1}\ln a = 0, \text{ donc} \\
\int_0^x t^k \ln t dt &= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x - \frac{1}{(k+1)^2}x^{k+1} \quad \text{et par suite} \\
(\varphi(v_k))(x) &= \frac{x^k}{k+1}\ln x - \frac{1}{(k+1)^2}x^k = \frac{1}{k+1}v_k(x) - \frac{1}{(k+1)^2}u_k(x)
\end{aligned}$$

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1}v_k - \frac{1}{(k+1)^2}u_k$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k \text{ et } \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1}v_k - \frac{1}{(k+1)^2}u_k}$$

3)

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$ appartiennent à E. Tout élément f de E est combinaison linéaire des u_k et des v_k. La linéarité de φ résulte de la linéarité des intégrales convergentes, donc $\varphi(f)$ appartient à E. $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E)}$

4)

La matrice de φ dans la base $C = (u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_k, v_k, \ldots, u_n, v_n)$ est

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots & & & & & & \dots & 0\\
0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & & & & \vdots\\
\vdots & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & & & & & & \vdots\\
\vdots & & 0 & \frac{1}{3} & 0 & & & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & & 0 & \frac{1}{k+1} & -\frac{1}{(k+1)^2} & & & \\
 & & & & & 0 & \frac{1}{k+1} & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & 0\\
\vdots & & & & & & & 0 & \frac{1}{n+1} & -\frac{1}{(n+1)^2}\\
0 & \dots & & & & & & \dots & 0 & \frac{1}{n+1}
\end{pmatrix}$$

5)

La matrice A est triangulaire supérieure ; aucun terme diagonal n'est nul, donc A est inversible

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } E}$$

D'après la lecture de la matrice A, $\boxed{\text{spect}(f)=\left\{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n+1}\right\}}$

6)

$\forall x>0,\ g(x)=x^{-\frac{1}{\lambda}}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\forall x>0,\ g'(x) &= -\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}-1}\int_0^x f(t)dt + x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x)\\
&= -\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt + x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x)\\
&= -\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}}(\varphi(f))(x) + x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x)\\
&= -\frac{1}{\lambda}x^{-\frac{1}{\lambda}}\lambda f(x) + x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x)\\
&\quad \text{puisque } f \text{ est un vecteur propre de } \varphi \text{ associé à } \lambda\\
&= -x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x) + x^{-\frac{1}{\lambda}}f(x) = 0
\end{aligned}$$

La fonction g est constante ; il existe $C\in\mathbb{R}\ /\ \forall x>0,\ g(x)=C$, ce qui équivaut à $x^{-\frac{1}{\lambda}}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=C$, puis à $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=Cx^{\frac{1}{\lambda}}$. En dérivant on obtient $f(x)=\dfrac{C}{\lambda}x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

$$f \text{ vecteur propre associé à } \lambda \text{ implique } \exists K\in\mathbb{R}^*\ /\ \forall x>0,\ f(x)=Kx^{\frac{1}{\lambda}-1}$$

Donc f vecteur propre associé à $\lambda=\dfrac{1}{k+1}$ implique $f\in\text{vect}(x^{k+1-1})=\text{vect}(u_k)$.

On a montré que $E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)\subset\text{vect}(u_k)$. D'après les résultats de la question 2), $\text{vect}(u_k)\subset E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)$. Par suite

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)=\text{vect}(u_k)}$$

7)

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dim E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)=1$; donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dim E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)=n$: or $\dim E=2n$, donc

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

EXERCICE II

1)

L'intégrale $I_k=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$ uniquement car la fonction $f_k\ :\ t\mapsto(\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle.

- En 0.

$f_k(t)\underset{(0)}{\sim}(\ln t)^k t^{x-1}=t^{\frac{x}{2}}(\ln t)^k t^{\frac{x}{2}-1}$. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to0^+}t^{\frac{x}{2}}(\ln t)^k=0$, par suite : $f_k(t)\underset{(0)}{=}\circ\left(t^{\frac{x}{2}-1}\right)=\dfrac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}$.

$x>0\Longleftrightarrow 1-\frac{x}{2}<1$; cela implique que $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}dt$ converge d'après le critère de Riemann.

Par la règle de négligeabilité pour les intégrales impropres, $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)dt$ converge.

- En $+\infty$.

$f_k(t)=\dfrac{(\ln t)^k}{t}e^{-t}t^x$. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{+\infty}\frac{(\ln t)^k}{t}=0\Longrightarrow f_k(t)\underset{(+\infty)}{=}\circ(e^{-t}t^x)$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x+1-1}dt$ converge d'après les lois gamma, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-t}t^x dt$ converge ; par la règle de négligeabilité pour les intégrales impropres, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}f_k(t)dt$ converge.

$$\boxed{\int_0^1 f_k(t)dt \text{ et } \int_1^{+\infty}f_k(t)dt \text{ convergent implique } \int_0^{+\infty}f_k(t)dt \text{ converge}}$$

2)

- Rappelons que $\Gamma(x+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^x e^{-t}dt$.

Soit a et b deux réels strictement positifs et $I(a,b)=\displaystyle\int_a^b t^x e^{-t}dt$. Faisons une intégration par parties.

$u(t)=t^x\Longrightarrow u'(t)=xt^{x-1}$; $v'(t)=e^{-t}\Longleftarrow v(t)=-e^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \Big[-t^x e^{-t}\Big]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= -b^x e^{-b}+a^x e^{-a}+x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}b^x e^{-b}=0$; de plus $\displaystyle\lim_{a\to0^+}a^x e^{-a}=0$ puisque $x>0$. Donc

$$\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} I(a,b) = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

$$\boxed{\forall x>0,\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$$

- $\forall x>0,\ L(x+1)=\ln\Gamma(x+1)=\ln x+\ln\Gamma(x)=\ln x+L(x)$. D'où, par dérivation, $L'(x+1)=\frac{1}{x}+L'(x)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x>0,\ \Psi(x+1)=\frac{1}{x}+\Psi(x)}$$

- $\forall n>0,\ \Psi(n+2)-\Psi(n)=\Psi(n+2)-\Psi(n+1)+\Psi(n+1)-\Psi(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}.$

3)

$$\int_0^A(\ln t)e^{-t}t^{x-1}dt=\int_0^A\Big((\ln t)e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\Big)\Big(e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\Big)dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\Big(\int_0^A(\ln t)e^{-t}t^{x-1}dt\Big)^2\leq\int_0^A\Big((\ln t)e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\Big)^2dt\times\int_0^A\Big(e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\Big)^2dt,\text{ soit}$$

$$\boxed{\Big(\int_0^A(\ln t)e^{-t}t^{x-1}dt\Big)^2\leq\int_0^A(\ln t)^2e^{-t}t^{x-1}dt\times\int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt}$$

4)

- Les trois intégrales sont convergentes d'après l'énoncé, donc en faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\Big(\int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}t^{x-1}dt\Big)^2\leq\int_0^{+\infty}(\ln t)^2e^{-t}t^{x-1}dt\times\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\text{ ou encore}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ (\Gamma'(x))^2\leq\Gamma''(x).\Gamma(x)}$$

- $\forall x>0,\ \Psi'(x)=\dfrac{\Gamma(x).\Gamma''(x)-(\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}>0$, donc

$$\boxed{\text{La fonction }\Psi\text{ est croissante sur }\mathbb{R}_+^*}$$

5–a)

- Procédons par récurrence. Soit $n\geq 1$ et P_n la propriété :

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2-a^2}=\frac{1}{2a}\Big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\Big)-\frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\Big).$$

- $$\begin{aligned}S_1=\frac{1}{1-a^2}&=\frac{1}{2a}\Big(-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{1-a}\Big)\quad\text{(vérification facile)}\\&=\frac{1}{2a}\Big(\Psi(a+1)-\Psi(a+2)\Big)+\frac{1}{2a}\Big(\Psi(2-a)-\Psi(1-a)\Big)\quad\text{d'après 2)}\\&=\frac{1}{2a}\Big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\Big)-\frac{1}{2a}\Big(\Psi(2+a)-\Psi(2-a)\Big)\end{aligned}$$

La propriété est satisfaite pour $n=1$.

- hérédité : supposons la propriété satisfaite pour un entier $n\geq 1$ donné.

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=S_n+\frac{1}{(n+1)^2-a^2}\\&=\frac{1}{2a}\Big(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)\Big)-\frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)\Big)\\&\quad+\frac{1}{(n+1)^2-a^2}\quad\text{(par hypothèse de récurrence)}\\\frac{1}{(n+1)^2-a^2}&=-\frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{n+1+a}-\frac{1}{n+1-a}\Big)\quad\text{(vérification immédiate)}\end{aligned}$$

Posons $A = -\frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)\Big) + \frac{1}{(n+1)^2 - a^2}$.

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)\Big) - \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{n+1+a} - \frac{1}{n+1-a}\Big) \\ &= -\frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+1+a) + \frac{1}{n+1+a} - (\Psi(n+1-a) + \frac{1}{n+1-a})\Big) \\ &= -\frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+2+a) - \Psi(n+2-a)\Big) \quad \text{d'après 2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2a}\Big(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)\Big) + A \\ &= \frac{1}{2a}\Big(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)\Big) - \frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+2+a) - \Psi(n+2-a)\Big) \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et par principe de récurrence,

$$\boxed{\forall a \in]0,1[,\ \forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\Big(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)\Big) - \frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)\Big)}$$

- $a \in]0,1[\Longrightarrow n+1+a \leq n+2$. Par croissance de Ψ (question 4)), $\Psi(n+1+a) \leq \Psi(n+2)$.

$n+1-a \geq n$ puisque $1-a > 0$, donc $\Psi(n+1-a) \geq \Psi(n)$, ou encore $-\Psi(n+1-a) \leq -\Psi(n)$. En ajoutant les deux inégalités, il vient, en tenant compte encore de la croissance de Ψ pour la minoration,

$$0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n)$$

5–b)

$\frac{1}{n^2 - a^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$. D'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente.

D'après la question 2), $\Psi(n+2) - \Psi(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$.

D'après le point précédent, $0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$. Le théorème d'encadrement donne $\lim_{n\to+\infty} \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) = 0$.

D'après la question 4), $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - a^2} - \frac{1}{2a}\Big(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)\Big) = -\frac{1}{2a}\Big(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)\Big)$,

donc $\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - a^2} - \frac{1}{2a}(\Psi(1+a) - \Psi(1-a))\Big) = 0$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - a^2} \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{1}{2a}(\Psi(1+a) - \Psi(1-a))}$$

PROBLEME

Partie I : étude d'un cas particulier

1–a)

Hors programme.

1–b)

Hors programme.

1–c)

Hors programme.

2)

duel 1	0	0	0	0	1	1	1	1
duel 2	0	0	2	2	1	1	2	2
duel 3	0	3	2	3	1	3	2	3

Une explication : la troisième colonne veut dire A_0 gagne le premier duel contre A_1, puis il joue contre A_2 et perd et A_2 gagne le troisième duel contre A_3.

E_1 et E_2 sont des événement certains, donc $P(E_1) = P(E_2) = 1$.

$\overline{E_3}$ est l'événement : A_0 gagne ses 3 duels ou A_1 gagne ses trois duels ; $P(\overline{E_3}) = 2 \times \frac{1}{8}$, donc $P(E_3) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Il en résulte immédiatement que $\boxed{P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1)}$

3)

E_n est réalisé si et seulement si le vainqueur de D_n a obtenu 1 ou 2 victoires consécutives.

Le vainqueur de D_n a obtenu exactement 1 victoire veut dire que A_n a gagné D_n contre A_{n-1} ou A_{n-2} ; cela veut dire que E_{n-1} est réalisé (car alors E_{n-2} l'est à coup sûr) et que A_n a gagné D_n. Donc

La probabilité que le vainqueur de D_n ait obtenu exactement une victoire est $P(E_{n-1}) \times \frac{1}{2}$.

Le vainqueur de D_n a exactement 2 victoires consécutives veut dire que A_{n-1} est le vainqueur de D_n; cela veut dire que E_{n-2} est réalisé (auquel cas le duel suivant a lieu) et que A_{n-1} gagne les duels D_{n-1} et D_n.

La probabilité que le vainqueur de D_n ait obtenu exactement deux victoires consécutives est $P(E_{n-2}) \times \frac{1}{4}$.

E_n étant la réunion de ces deux événements incompatibles,

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ \ P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2})}$$

4)

La suite $(P(E_n))$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :

$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0 \iff 4r^2 - 2r - 1 = 0$. Les racines sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

D'après le cours, $\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ /\ \forall n \geq 1,\ \ P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

$2 < \sqrt{5} < 3 \iff \frac{3}{4} < r_1 < 1$; on a aussi $-\frac{1}{2} < r_2 < -\frac{1}{4}$; par suite $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_1^n = \lim\limits_{n\to+\infty} r_2^n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0}$$

5)

$\forall n \in \mathbb{N},\ E_{n+1} \subset E_n$ car s'il n'y a pas de vainqueur à l'issue du duel D_{n+1}, il ne pouvait y en avoir à l'issue du duel D_n. La suite (E_n) est décroissante pour l'inclusion ; d'après le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0}$$

Remarque : les événement E_1 et E_2 sont des événements certains, donc

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n = \bigcap_{n=3}^{+\infty} E_n.$$

Notons V l'événement : le tournoi désigne un vainqueur.

V est réalisé $\Longleftrightarrow \exists\, n \geq 3\ /\ \overline{E_n}$ est réalisé. Par suite

$V = \bigcup_{n=3}^{+\infty} \overline{E_n} = \overline{\bigcap_{n=3}^{+\infty} E_n}$

$P(V) = 1 - P(\bigcap_{n=3}^{+\infty} E_n) = 1$ d'après le résultat de la question 4).

$$\boxed{\text{La probabilité que le tournoi désigne un vainqueur est } 1}$$

Partie II : étude du cas général

1)

Il y a dans cette question un problème manifeste. En effet,

$\forall k \in [\![1, N-1]\!]$. Si l'événement $A_k^{(n)}$ est réalisé, cela veut dire que le vainqueur du duel D_n a gagné k duels consécutifs. Puisque $k < N$, à l'issue du duel D_n, il n'y a donc pas de vainqueur, donc $A_k^{(n)} \subset E_n$. $\qquad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = 1$.

2)

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{N-1} (A_k^{(n)} \cap E_{n-k}).$$

En effet, En est réalisé si et seulement si le duel numéro n a lieu et le vainqueur de ce duel a obtenu un nombre de victoires (consécutives) strictement inférieur à N,

si et seulement si le duel numéro n a lieu et le vainqueur de ce duel a obtenu un nombre $k < N$ de victoires,

si et seulement si le duel numéro $n - k + 1$ a lieu et le joueur A_{n-k+1} gagne les duels numéros $n - k + 1, \ldots, n - 1, n$, (ce qui fait k duels)

si et seulement si à l'issue du duel numéro $n - k$ le tournoi n'est pas terminé et le joueur A_{n-k+1} gagne les duels numéros $n - k + 1, \ldots, n - 1, n$.

Ces événements sont deux à deux incompatibles,

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)} \cap E_{n-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} P(E_{n-k}) P_{E_{n-k}}(A_k^{(n)}) \\ & \sum_{k=1}^{N-1} P(E_{n-k}) pq^{k-1}) \end{aligned}$$

Lorsque (E_{n-k}) est réalisé, réaliser $A_k^{(n)}$ veut dire que le joueur A_{n-k+1} gagne le duel D_{n-k+1} (avec la probabilité p) et que les $k-1$ joueurs $A_{n-k+2}, \dots, A_n$ perdent le leur (avec la probabilité q).

La formule des probabilités composées donne sans difficulté : $P_{E_{n-k}}(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}$

$$\boxed{(\mathcal{R}_2) : \forall n \geq N,\ P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})}$$

3)

- Si l'on utilise $(\mathcal{R}_2)$: $P(E_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{N-k})$.

$\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, on a : $1 \leq N-k \leq N-1$; par suite l'événement E_{N-k} est l'événement certain.

$P(E_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} = p\frac{1-q^{N-1}}{1-q}$.

$$\boxed{P(E_N) = 1 - q^{N-1}}$$

- Si l'on n'utilise pas $(\mathcal{R}_2)$:

$\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, il est certain que le vainqueur du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du k ème duel puisqu'il faut, pour ce faire, qu'un joueur ait obtenu N victoires consécutives et qu'il y a strictement moins de N duels.

L'événement $\overline{E_N}$ est l'événement " il y a eu un gagnant du tournoi à l'issue du N ème duel ". Cela veut dire qu'il y a eu N victoires consécutives pour un même joueur, donc cela veut dire que le joueur A_0 a gagné contre $A_1, \dots, A_{N-1}, A_N$ ou A_1 a gagné contre $A_0, A_2, \dots, A_{N-1}, A_N$.

Notons C_0 l'événement " le joueur A_0 a gagné contre $A_1, \dots, A_{N-1}, A_N$ " et C_1 l'événement " le joueur A_1 a gagné contre $A_0, A_2 \dots, A_{N-1}, A_N$ ".

$\overline{E_N} = C_0 \cup C_1$; réunion de deux événements incompatibles, donc $P(\overline{E_N}) = P(C_0) + P(C_1)$.

C_0 est l'intersection de N événements ; chacun d'entre eux a pour probabilité q puisque les joueurs $A_1, A_2, \dots, A_N$ ont perdu. La formule des probabilités composées donne $P(C_0) = q^N$.

C_1 est aussi l'intersection de N événements ; le premier a pour probabilité p puisque A_1 a gagné le duel D_1, les $N-1$ suivants ont pour probabilité q puisque $A_2, \dots, A_N$ perdent leur duel. $P(C_1) = pq^{N-1}$.

$P(\overline{E_N}) = q^N + pq^{N-1} = q^{N-1}(q+p) = q^{N-1}$

4)

Soit $n \geq N$.

$P(E_n) - P(E_{n+1}) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k})$.

Dans la seconde somme, posons $j = k-1$.

$$\begin{aligned}
P(E_n) - P(E_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{j=0}^{N-2} pq^{j}P(E_{n-j}) \\
&= \sum_{j=1}^{N-2} (pq^{j-1} - pq^j)P(E_{n-j}) + pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= \sum_{j=1}^{N-2} pq^{j-1}(1-q)P(E_{n-j}) + pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= p\sum_{j=1}^{N-2} pq^{j-1}pP(E_{n-j}) + pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= p\Big(\sum_{j=1}^{N-1} pq^{j-1}pP(E_{n-j}) - pq^{N-2}P(E_{n-N+1})\Big) \\
&\qquad\qquad +pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= p\sum_{j=1}^{N-1} pq^{j-1}pP(E_{n-j}) - p^2q^{N-2}P(E_{n-N+1}) \\
&\qquad\qquad +pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= p.\underbrace{P(E_n)}_{\text{d'après } (\mathcal{R}_2)} - p^2q^{N-2}P(E_{n-N+1}) + pq^{N-2}P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= p(1-p)q^{N-2}P(E_{n-N+1})
\end{aligned}$$

$$\boxed{(\mathcal{R}_3) : \forall n \geq N,\ \ P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1})}$$

5)

Il est clair que Q est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale.

$\forall x \geq 0,\ Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} kpq^{k-1}x^{k-1} = p + \sum_{k=2}^{N-1} kpq^{k-1}x^{k-1} > 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

$Q(0) = -1,\ \lim_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$.

La fonction Q est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[-1, +\infty[$.

Il existe un unique réel r_N dans $[0, +\infty[$ tel que $Q(r_N) = 0$.

$Q(1) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 = p\dfrac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = -q^{N-1} < 0$.

$Q(1) < Q(r_N) \iff 1 < r_N$ par la stricte croissance de Q.

$$\boxed{\exists\, ! r_N \in]1, +\infty[\ /\ Q(r_N) = 0 \text{ et } Q'(r_N) > 0\ (\text{car } Q' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+)}$$

6)

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété ; $P(E_n) \leq \left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ et procédons par récurrence.

$\forall n \in [\![1, N]\!],\ \left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n-N} = r_N^{N-n} \geq 1$ car $r_N > 1$ et $N - n \geq 0$.

$\mathcal{P}_n$ est satisfaite pour $n \in [\![1, N]\!]$ puisque $P(E_n) \leq 1 \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ d'après ce que nous venons de voir.
Soit n un entier $n \geq N$, donné. Supposons la propriété satisfaite pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (récurrence forte).

D'après la relation $(\mathcal{R}_2)$: $P(E_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n+1-k})$.

$1 \leq k \leq N-1 \iff 1-N \leq -k \leq -1 \iff n+2-N \leq n+1-k \leq n$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $P(E_{n+1-k})$ pour $1 \leq k \leq N-1$.

$P(E_{n+1-k}) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n+1-k-N}$, donc $pq^{k-1}P(E_{n+1-k}) \leq pq^{k-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n+1-k-N}$ car $pq^{k-1} > 0$.
Par suite,

$$P(E_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n+1-k-N} = \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n+1-N} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k.$$

$$P(E_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n+1-N} \text{ car } \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k = Q(r_N) + 1 = 1.$$

La propriété est satisfaite au rang $n+1$; elle est héréditaire ; par principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}}$$

7)

La série de terme général $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ est une série géométrique, de raison $\frac{1}{r_N} \in]0, 1[$ puisque $r_N > 1$. Elle est donc convergente. On a : $0 \leq P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$.

Par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum P(E_n) \text{ est convergente}}$

D'après la relation $(\mathcal{R}_3)$, pour $n \geq N$,

$\displaystyle\sum_{k=N}^{n} (P(E_k) - P(E_{k+1})) = \sum_{k=N}^{n} pq^{N-1} P(E_{k-N+1})$. Après " télescopage additif ", il vient,

$P(E_N) - P(E_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=N}^{n} pq^{N-1} P(E_{k-N+1})$. Posons $j = k - N + 1$;

$P(E_N) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-N+1} P(E_j)$. D'autre part $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(E_{n+1}) = 0$ puisque la série est convergente, donc en passant à la limite pour $n \to +\infty$ (pas de problème de convergence), on obtient

$$P(E_N) = pq^{N-1} \sum_{j=1}^{+\infty} P(E_j), \text{ d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{P(E_N)}{pq^{N-1}} = \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}}$$

8–a)

$E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ est l'événement : à l'issue du duel D_{n-1} il n'y a pas de vainqueur du tournoi et à l'issue du duel D_n il y a un vainqueur du tournoi ; cela veut dire qu'il a fallu exactement n duels pour obtenir le vainqueur du tournoi.

$$\forall n \geq 2,\ (X = n) = E_{n-1} \cap \overline{E_n}$$

8–b)

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2,\ E_{n-1} &= (E_n \cap E_{n-1}) \cup (\overline{E_n} \cap E_{n-1}) \\
&= E_n \cup (\overline{E_{n-1}} \cap E_n) \quad \text{car } E_n \subset E_{n-1}, \text{ donc} \\
P(E_{n-1}) &= P(E_n) + P(\overline{E_n} \cap E_{n-1}) \quad \text{par suite} \\
\forall n \geq 2,\ P(X=n) &= P(E_{n-1}) - P(E_n)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq N,\ P(X=n) = pq^{N-1}P(E_{n-N}) \text{ d'après } (\mathcal{R}_3)}$$

On peut remarquer que $2 \leq n \leq N-1 \Longrightarrow P(X=n)=0$ puisque $P(E_n)=P(E_{n-1})=1$.
Cela permet de affirmer que $X(\Omega) = \{0\} \cup [\![N, +\infty[\![$.
Pour $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
nP(X=n) &= npq^{N-1}P(E_{n-N}) \\
&\leq npq^{N-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-2N} \quad \text{d'après la question 6)} \\
&\leq pq^{N-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{-2N+1}\left(n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

On reconnait en $\left(n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1}\right)$ la dérivée d'une série géométrique de raison $\frac{1}{r_N}$, série qui converge (vu question 7)). La série $\sum pq^{N-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{-2N+1}\left(n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1}\right)$ converge donc. Par comparaison des séries à termes positifs, l'encadrement $0 \leq nP(X=n) \leq pq^{N-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{-2N+1}\left(n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1}\right)$ permet de conclure que la série $\sum nP(X=n)$ est convergente.

$$\boxed{E(X) \text{ existe puisque la série est absolument convergente}}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \times P(X=0) + \sum_{n=N}^{+\infty} nP(X=n) \\
&= \sum_{n=N}^{+\infty} n(P(E_{n-1}) - P(E_n)) \quad \text{d'après le point précédent} \\
&= \sum_{n=N}^{+\infty} (nP(E_{n-1}) - nP(E_n)) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=N}^{n} (kP(E_{k-1}) - kP(E_k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{n}(kP(E_{k-1}) - kP(E_k)) &= \sum_{k=N}^{n}\Big((k-1)P(E_{k-1}) + P(E_{k-1}) - kP(E_k)\Big) \\
&= \sum_{k=N}^{n}(k-1)P(E_{k-1}) - \sum_{k=N}^{n} kP(E_k) + \sum_{k=N}^{n} P(E_{k-1}) \\
&= \sum_{j=N-1}^{n-1} jP(E_j) - \sum_{k=N}^{n} kP(E_k) + \sum_{k=N}^{n} P(E_{k-1}) \\
&= (N-1)P(E_{N-1}) - nP(E_n) + \sum_{i=N-1}^{n-1} P(E_i) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} P(E_k) - nP(E_n) + \sum_{i=N-1}^{n-1} P(E_i) \\
&\qquad \text{car } P(E_k) = 1 \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1 \\
&= P(E_{N-1}) + \sum_{k=1}^{N-2} P(E_k) - nP(E_n) + \sum_{i=N-1}^{n-1} P(E_i) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} P(E_k) - nP(E_n)
\end{aligned}$$

D'après 6), $0 \leq P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} = r_N^{N-1}\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1}$, donc $0 \leq nP(E_n) \leq r_N^{N-1} n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1}$.
La série $\sum n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1}$ converge (déjà vu), donc $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1} = 0$ et par encadrement $\lim_{n\to+\infty} nP(E_n) = 0$.

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = 1 + \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}} \\ &= \frac{pq^{N-1} + 1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}} pq^{N-1} \\ &= \frac{1 + q^{N-1}(p-1)}{pq^{N-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1-q^N}{pq^{N-1}}}$$

Partie III : calcul de $P(E_n)$

1)

$R(X) = (qX-1)Q(X)$; $Q(z) = 0 \Longrightarrow R(z) = 0$.

$R'(X) = qQ(X) + (qX-1)Q'(X)$; $Q(z) = Q'(z) = 0 \Longrightarrow R'(z) = 0$.

L'égalité $XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N$ implique $(N-1)z - N = 0$, c'est-à-dire $z = \frac{N}{N-1} = 1 + \frac{1}{N-1}$. On en déduit que $z \in]1, +\infty[$; par unicité, on aurait $z = r_N$ avec par conséquent $Q'(r_N) = 0$, ce qui est contradictoire.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, les racines de Q sont simples, donc distinctes et au nombre de $N-1$.

2–a)

La linéarité de f est évidente, nous la laissons au soin du lecteur.

$f(S) = 0 \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, N-1]\!],\ S(\frac{1}{z_k}) = 0$; le polynôme S admet $N-1$ racines distinctes puisque les z_k sont deux à deux distincts. Or $S \in \mathbb{C}_{N-2}[X]$; donc S est le polynôme nul. Il en résulte que f est injective. Or $\dim \mathbb{C}_{N-2}[X] = \dim \mathbb{C}^{N-1} = N-1$, donc

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{C}_{N-2}[X] \text{ dans } \mathbb{C}^{N-1}}$$

2–b)

$\forall k \in [\![0, N-2]\!],\ f(X^k) = ((\frac{1}{z_1})^k, \dots, (\frac{1}{z_j})^k, \dots, (\frac{1}{z_{N-1}})^k)$. D'où la matrice A de f dans les base canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbb{C}^{N-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \dots & (\frac{1}{z_1})^k & \dots & (\frac{1}{z_1})^{N-2} \\ \vdots & \frac{1}{z_2} & & (\frac{1}{z_2})^k & & (\frac{1}{z_2})^{N-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_j} & \dots & (\frac{1}{z_j})^k & \dots & (\frac{1}{z_j})^{N-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_{N-1}} & & (\frac{1}{z_{N-1}})^k & & (\frac{1}{z_{N-1}})^{N-2} \end{pmatrix}$$

$$
{}^tA = \begin{pmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
\frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & & \frac{1}{z_j} & & \frac{1}{z_{N-2}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\frac{1}{z_1})^k & (\frac{1}{z_2})^k & & (\frac{1}{z_j})^k & & (\frac{1}{z_{N-2}})^k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\frac{1}{z_1})^{N-2} & (\frac{1}{z_2})^{N-2} & & (\frac{1}{z_j})^{N-2} & & (\frac{1}{z_{N-2}})^{N-2}
\end{pmatrix}
$$

2–c)

Le système s'écrit matriciellement ; ${}^tA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(E_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(E_{N-1}) \end{pmatrix}$

A inversible implique ${}^tA$ inversible. L'égalité précédente équivaut à

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = ({}^tA)^{-1} \begin{pmatrix} P(E_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ P(E_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Le système précédent admet une unique solution notée } (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})}$$

3)

- Pour tout $n \geq N$, posons $v_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$.

$$
\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-k-1} \quad \text{(par définition de la suite } (u_n)) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} pq^{k-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-k-1} \quad \text{(interversion des ordres de sommation)} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} (\frac{1}{z_j})^{-k} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} (z_j)^k \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-1} \Big(Q(z_j) + 1\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \geq N,\ v_n = u_n \iff \forall n \geq N,\ u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}}$$

- Procédons par récurrence. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété $\forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = P(E_k)$.

$\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ P(E_n) = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-1}$ d'après la résolution du système précédent. Donc $P(E_n) = u_n$ par définition de la suite (u_n).

La propriété est satisfaite pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$.

Supposons la propriété satisfaite pour un entier $n \geq N-1$ donné.

$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n+1-k}$ d'après le point précédent.

$1 \leq k \leq N-1 \iff 1-N \leq -k \leq -1$, donc $n-N+2 \leq n+1-k \leq n$. Par hypothèse de récurrence qui s'applique, $u_{n+1-k} = P(E_{n+1-k})$, donc

$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n+1-k}) = P(E_{n+1})$ d'après la propriété $(\mathcal{R}_2)$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est satisfaite ; c'est l'hérédité.

Par principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ u_n = P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j (\frac{1}{z_j})^{n-1}}$$