ecricome
www.ecricome.org

CONCOURS D'ADMISSION 2007

2

Mathématiques

Option Economique

Mercredi 18 avril 2007 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

1. EXERCICE.

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1.1. Etude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.

4. En déduire que :

$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geqslant a$$

1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$..

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :

$$\forall t > a \qquad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier n, non nul :

$$u_n \geqslant a$$

4. Prouver alors que pour tout entier n non nul :

$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1 + x)(1 + y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.

3. Vérifier que :

$$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y})$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. EXERCICE.

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
La matrice A suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

2.1. Diagonalisation de A.

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.

2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :
$$A = PDP^{-1}$$
Donner l'écriture matricielle de P^{-1}.

2.2. Diagonalisation de ϕ_A.

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A. En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A.

3. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :
$$DN - ND = \lambda N$$

4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a. Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.

   b. En déduire que la famille (A,M_1) avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre $Ker\phi_A$ associé à la valeur propre 0.

   c. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.

   d. En déduire une base de chaque sous-espace propre E_{λ_1} et E_{λ_1}associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

5. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?

3. EXERCICE.

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

3.1. Mode de paiement de la clientèle.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S=0 \cap U=0] = 0.4$$
$$P[S=0 \cap U=1] = 0.3$$
$$P[S=1 \cap U=0] = 0.2$$
$$P[S=1 \cap U=1] = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

   a. Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \frac{3}{5}$.

   b. Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?

   c. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.
Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geqslant 2$).
On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
-C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
-L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

   a. Reconnaître la loi de C_n, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

b. Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P\left[L_1 = k\right] = 1$$

c. Déterminer la loi de L_2.

3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

3. a. Démontrer que la fonction de répartition de T, notée F_T est définie par :

$$\begin{array}{ll} \forall x < 0 & F_T(x) = 0 \\ \forall x \geqslant 0 & F_T(x) = 1 - (x+1)e^{-x} \end{array}$$

   b. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités(de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\dfrac{2e-3}{2e}$.

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

   a. M désignant le temps d'attente du client C exprimer M en fonction de T_A et T_B.

b. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & P[M \leqslant t] = 1 - (1+t)^2 e^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} & P[M \leqslant t] = 0 \end{cases}$$

c. Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

ECRICOME 2007 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE I

1.1 Etude de la fonction f_a

1)

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right) = +\infty$ sans problème car $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{a^2}{t} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty}$

- $f_a(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{2t}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}(f_a(t) - \frac{1}{2}t) = 0$. On en conclut que la droite " oblique " d'équation $y = \frac{1}{2}t$ est asymptote à la courbe de f_a au voisinage de $+\infty$.

Remarque : on peut rappeler que deux fonctions g et h sont asymptotes au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{t\to+\infty}(g(t) - h(t)) = 0$.

D'autre part, pour $t > 0$, $\frac{a^2}{t} > 0$, donc $f_a(t) - \frac{1}{2}t > 0$ ou encore $f_a(t) > \frac{1}{2}t$. Cela signifie que pour tout $t > 0$ (donc au voisinage de $+\infty$ en particulier), la courbe de f_a est au dessus de son asymptote.

2)

- $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{2}t = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{a^2}{2t} = +\infty$ implique $\lim\limits_{t\to 0^+} f_a(t) = +\infty$.

Graphiquement cela indique que l'axe des ordonnées du repère dans lequel est construite la courbe de f_a est asymptote à cette courbe.

3)

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{a^2}{t}$ est continue, dérivable en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $t \mapsto t + \frac{a^2}{t}$ aussi et f_a est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall t > 0,\ f_a'(t) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right)\\ &= \frac{t^2 - a^2}{2t^2} = (t-a)\frac{t+a}{2t^2}\end{aligned}$$

Pour tout $t > 0$, $\frac{t+a}{2t^2} > 0$, donc le signe de $f_a'(t)$ est le même que celui de $(t-a)$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

t	0		a		$+\infty$
$f_a'(t)$		$-$	0	$+$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

4) ___

Le tableau de variations précédent fait apparaître clairement que la fonction f_a présente un minimum absolu au point $t = a$, dont la valeur est a. Donc

$$\boxed{\forall t > 0,\ f_a(t) \geq a}$$

1.2 Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$

1) ___

Si $u_0 = a$, alors $u_1 = f_a(u_0) = f_a(a) = a$ d'après l'étude précédente. Supposons que $u_n = a$ pour un entier n donné, alors $u_{n+1} = f_a(u_n) = f_a(a) = a$. Nous venons de montrer par récurrence que si $u_0 = a$, la suite (u_n) est constante et égale à a.

2) ___

- $f_a'(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2t^2}$.

On conclut que $\forall t > 0,\ f_a'(t) - \frac{1}{2} < 0$, donc $f_a'(t) < \frac{1}{2}$; en particulier pour $t > a$.

- Si $t > a > 0$, alors par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $t^2 > a^2 > 0$. En divisant par $t^2 > 0$, il vient $1 > \frac{a^2}{t^2}$; donc $1 - \frac{a^2}{t^2} > 0$.

Conclusion : pour $t > a$, on a $f_a'(t) > 0$ et par conséquent $\boxed{\forall t > a,\ 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}}$

3) ___

- On montre d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

$u_0 > 0$ par hypothèse ; supposons $u_n > 0$ pour un entier naturel n donné. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq a$ d'après 1.4) puisque $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$. La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$

Remarque : cela revient à dire et à utiliser le fait que l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f. En effet, d'après le tableau de vriations de f, $f(]0, +\infty[) = [a, +\infty[\subset]0, +\infty[$.

- Puis d'après le tableau de variations de la question 1.3), $\forall n > 0,\ u_n = f(u_{n-1}) \geq a$ puisque u_{n-1} existe $(n - 1 \geq 0)$ et $u_{n-1} > 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq a}$$

Remarque : cela veut dire que $\forall n \geq 1$, u_n appartient à l'intervalle $[a, +\infty[$

4) ___

La fonction f_a est continue, dérivable sur $[a, +\infty[$. De plus, d'après la question 2.2), sur cet intervalle, $0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}$, donc $|f_a'(t)| \leq \frac{1}{2}$.

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_a entre a et u_n.

$$\forall n \geq 1,\ |f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|u_n - a| \text{ soit encore } |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|,$$

puisque $f_a(a) = a$.

Mais on sait que $\forall k \geq 1,\ u_k \geq a$, donc on a $0 \leq u_{n+1} - a$ et $0 \leq u_n - a$. L'inégalité précédente devient :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)}$$

Remarque : On aurait pu dire aussi :

$0 \leq f_a'(t) \leq \frac{1}{2}$, $f(u_n) - f(a) \geq 0$ et $u_n - a \geq 0$, donc :

$0 \times (u_n - a) \leq f(u_n) - f(a) \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$, soit $0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$.

- Montrons l'inégalité $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$ par récurrence sur $n \geq 1$

Initialisation : $|u_1 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$, donc $|u_1 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$

Hérédité : supposons l'inégalité satisfaite pour un entier $n \geq 1$ donné ;
on a donc $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$.

Multiplions les deux termes de cette inégalité par $\frac{1}{2} > 0$, on obtient $\frac{1}{2}|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$.

Or, d'après l'inégalité des accroissements finis précédente, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$. La comparaison des deux inégalités donne $|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$

L'inégalité est donc héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est satisfaite pour tout $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|}$$

5)

La suite $n \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, elle converge donc vers 0.

L'encadrement $0 \leq |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - a|$ permet de conclure que la suite $n \mapsto |u_n - a|$ est convergente et que sa limite est nulle. Il en résulte que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

6)

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$, c'est que $f_{\sqrt{2}}(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{2}{t})$

```
PROGRAMME ECRICOME2007 ;
var k : integer ;
    u : real ;
BEGIN
u := 1 ; k := 1 ; writeln('u(',1,')=' , u) ;
for k :=2 to 100 do begin
      u:=(u+2/u)/2 ;
      writeln('u(',k,')=' ,u) ;
                end ;
END.
```

1.3 Recherche d'un extremum d'une fonction de deux variables

1)

La fonction g est le produit d'une fraction rationnelle $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = \frac{x+y}{2xy}$ dont le dénominateur ne s'annule par sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et du polynôme $(x, y) \mapsto (1 + x)(1 + y)$ qui sont tous les deux continus, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de $\mathbb{R}^2$.

g est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{1+y}{2}\Big(-\frac{1}{x^2}(1 + x) + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})\Big) \\ &= \frac{1+y}{2}\Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\Big) \\ &= \frac{1+y}{2} \times \frac{x^2 - y}{x^2 y}. \end{aligned}$$

En remarquant que $g(x,y)=g(y,x)$, le même calcul donnera

Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1+x}{2}\times\dfrac{y^2-x}{y^2x}$.

Le couple (x,y) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point critique de g si et seulement si (x,y) est solution du système
$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & =0\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & =0\end{cases}$$

Ce système équivaut à $\begin{cases}x^2-y & =0\\ y^2-x & =0\end{cases}$ puisque $\dfrac{1+y}{2}\times\dfrac{1}{x^2y}$ et $\dfrac{1+x}{2}\times\dfrac{1}{y^2x}$ sont strictement positifs sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Soit encore $x^2=y$ et $x=y^2$, donc par substitution, $y^4=y$ et $x=y^2$. Puisque x et y sont strictement positifs, $y^4=y$ équivaut à $y^3=1$. La fonction $t\mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui même, donc l'équation $y^3=1$ y admet une seule solution $y=1$. La deuxième équation $x=y^2$ donne alors $x=1$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet sur } (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ un unique point critique } (x,y)=(1,1)}$$

2)

La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, le thèorème de Schwarz donne $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)$

Pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{1+y}{2}\left(\frac{2}{x^3}\right)=r(x,y)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1+x}{2}\left(\frac{2}{y^3}\right)=t(x,y)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1+y}{2}\times\frac{-1}{y^2}\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=s(x,y)
\end{aligned}$$

> Au point critique $(1,1)$, $(s^2-rt)(1,1)=1-2\times2=-3<0$. Il y a donc un extremum local. De plus $r(1,1)=2>0$, donc il s'agit d'un minimum local

3)

$$\begin{aligned}
1+f_1(x)+f_1(y)+f_1(\tfrac{x}{y}) &= 1+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})+\frac{1}{2}(y+\frac{1}{y})+\frac{1}{2}(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})\\
&= \frac{1}{2}(2+x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}).\\
g(x,y) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(1+x)(1+y)\\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(1+x+y+xy)\\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{x}+1+\frac{y}{x}+y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+1+x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } \forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ 1+f_1(x)+f_1(y)+f_1(\tfrac{x}{y})=g(x,y)}$$

La valeur du minimum local est $g(1,1)=4$. D'après la question 1.4), on sait que $\forall t>0,\ f_a(t)\geq a$, donc $\forall t>0,\ f_1(t)\geq 1$.

$\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ f_1(x)\geq1,\ f_1(y)\geq1$ et $f_1(\frac{x}{y})\geq1\Longrightarrow g(x,y)\geq4=g(1,1)$

$$\boxed{\text{Au point } (1,1) \text{, la fonction } g \text{ admet un minimum absolu puisque } \forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ g(x,y)\geq g(1,1)}$$

EXERCICE II

2.1 Diagonalisation de A

1)

Il suffit de faire le calcul : $A^2 = A$.

- Le polynôme $X^2 - X$ est donc un polynôme annulateur de A puisque $A^2 - A = (0)$. On sait qu'alors les valeurs propres possibles de A sont solutions de l'équation $x^2 - x = 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } 0 \text{ ou } 1 : \text{spect}(A) \subset \{0, 1\}}$$

Pour ceux qui ne connaissent pas ce résultat :

Si λ est valeur propre de A, il existe $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X \neq (0)$, telle que $AX = \lambda X$. Donc $A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Or $A(AX) = A^2 X = AX = \lambda X$. On obtient l'égalité : $\lambda X = \lambda^2 X$ et puisque $X \neq (0)$, cela implique $\lambda^2 = \lambda$, ce qui est le résultat annoncé.

2)

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique. Dans cette base, la matrice A est associée à un endomorphisme f et l'on sait que f et A ont les mêmes valeurs propres, et que f diagonalisable équivaut à A diagonalisable.

Raisonnons sur f.

- Détermination de $\operatorname{Ker} f$:

$u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f(x, y) = (0, 0)$. Cette égalité équivaut au système suivant :

$\begin{cases} 3x - y &= 0 \\ 6x - 2y &= 0 \end{cases}$ Effectuons $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ on obtient le système équivalent

$\begin{cases} 3x - y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$

Donc $(x, y) \in \operatorname{Ker} f \iff y = 3x$

$\operatorname{Ker} f = \{u = (x, 3x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 3))$.

Si l'on note, d'une manière générale $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à λ, on a :

$$\boxed{E_0(f) = \text{vect}((1, 3)) : \dim E_0(f) = 1}$$

- Détermination de $\operatorname{Ker}(f - \text{Id})$:

$f(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ 6x - 3y &= 0 \end{cases}$ Effectuons $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$, on obtient le système équivalent suivant $\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(f - \text{Id}) \neq \{0\}$; par suite $\operatorname{Ker}(f - \text{Id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{E_1(f) = \{u = (x, 2x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 2)) : \dim E_1(f) = 1}$$

Conclusion :

> f est un endomorphisme d'un espace de dimension 2 ; la somme des dimensions de ses deux sous-espaces propres vaut 2, donc f (et par conséquent A) est diagonalisable

Remarque : on aurait pu dire aussi : f est un endomorphisme d'un espace de dimension 2 qui admet deux valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable (c'est une condition suffisante de diagonalisabilité).

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la formule de changement de base pour les endomorphismes (ou les matrices carrées) permet d'écrire :

$$A = PDP^{-1}$$

- Détermination de P^{-1}

On résout le système $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ équivaut à :

$$\begin{cases} x+y & = a \\ 3x+2y & = b \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y & = a \\ -y & = b-3a \end{cases} \iff \begin{cases} y & = -b+3a \\ x & = a-(-b+3a) = -2a+b \end{cases}$$

En mettant ces résultats sous forme matricielle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

2.2. Diagonalisation de φ_A

1)

D'après les propriétés de calcul dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a dèjà $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

Soit $(M, M') \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_A(M+\lambda M') &= A(M+\lambda M') - (M+\lambda M')A \\ &= AM + \lambda AM' - MA - \lambda M'A \\ &= (AM - MA) + \lambda(AM' - M'A) \\ &= \varphi_A(M) + \lambda\varphi_A(M') \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On vient de montrer que } \varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))}$$

2)

- Calculons, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi_A^3(M)$

$$\begin{aligned} \varphi_A^2(M) &= \varphi_A(AM) - MA) \\ &= A(AM - MA) - (AM - MA)A \\ &= A^2M - 2AMA + MA^2 = AM - 2AMA + MA \quad \text{car } A^2 = A \\ \varphi_A^3(M) &= \varphi_A(AM - 2AMA + MA) \\ &= A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A \\ &= A^2M - 2A^2MA + AMA - AMA + 2AMA^2 - MA^2 \\ &= AM - 2AMA + 2AMA - MA \\ \varphi_A^3(M) &= AM - MA = \varphi_A(M) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \varphi_A^3(M) - \varphi_A(M) = (0)$, ce qui veut dire $\varphi_A^3 - \varphi_A = 0$

$$\boxed{\text{Le polynôme } X^3 - X \text{ est donc un polynôme annulateur de } \varphi_A}$$

On en déduit, comme on l'a fait au 2.1.1) que les valeurs propres possibles de φ_A sont les racines de l'équation $x^3 - x = 0$, c'est-à-dire 0 ou -1 ou 1.

$$\boxed{\operatorname{spect}(\varphi_A) \subset \{-1, 0, -1\}}$$

3)

$M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est vecteur propre de φ_A associé à une valeur propre λ si et seulement si $M \neq (0)$ et $\varphi_A(M) = \lambda M$, c'est-à-dire

$$AM - MA = \lambda M \qquad \textbf{(1)}$$

Or $N = P^{-1}MP$, donc $M = PNP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$. Remplaçons M et A par leurs valeurs dans **(1)**, cela donne

$$\begin{aligned} AM - MA = \lambda M &\iff PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}NP^{-1} - PN\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1} = \lambda PNP^{-1} \\ &\iff PDNP^{-1} - PNDP^{-1} = \lambda PNP^{-1} \\ &\iff P(DN - ND)P^{-1} = \lambda PNP^{-1} \end{aligned}$$

Multiplions cette dernière égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P, il vient

$AM - MA = \lambda M \iff P^{-1}P(DN - ND)P^{-1}P = \lambda P^{-1}PNP^{-1}P$, donc finalement

$$\boxed{AM - MA = \lambda M \iff DN - ND = \lambda N}$$

Rappelons peut-être que, lorsque l'on multiplie les deux termes d'une égalité matricielle par une matrice inversible (multiplication à droite ou à gauche), on obtient une égalité équivalente.

4)

∗ 4.1

- Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} DN - ND &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation $DN - ND = (0)$ équivaut à $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = (0)$, donc à $b = c = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \varphi_A &= \{N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ b = c = 0\} \\ &= \{N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ (a, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{N = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ (a, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

∗ 4.2

Revenons aux matrices M :

$M = PNP^{-1}$, donc

$N = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff P^{-1}MP = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplions les deux termes de cette égalité par P à gauche et P^{-1} à droite, on obtient

$$\begin{aligned}
M &= P(a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})P^{-1}\\
&= aP\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}+dP\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}\\
&= a\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}\\
&= a\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}\\
&= a\begin{pmatrix}-2&1\\-6&3\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}3&-1\\6&-2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion :}\ \operatorname{Ker}\varphi_A=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}-2&1\\-6&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&-1\\6&-2\end{pmatrix}\right)=\operatorname{vect}(A_1,A)}$$

Remarque : On peut tout de suite noter que

- $\dim\operatorname{Ker}\varphi_A=2$, puisque les matrices A et A_1 ne sont pas proportionnelles et forment donc une famille libre.
- $\operatorname{Ker}\varphi_A=E(0,\varphi_A)$ (sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 0).

$*$ **4.3**

- Résolvons l'équation $DN-ND=(-1)N=-N$. Soit $N=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; cette égalité équivaut à $\begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}$, ce qui donne $a=c=d=0$

$\{N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ /\ DN-ND=-N\}=\{N=\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix},\ b\in\mathbb{R}\}$

- • Résolvons l'équation $DN-ND=N$. Avec les mêmes notations, cette égalité équivaut à $\begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; ce qui donne $a=b=d=0$

$\{N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ /\ DN-ND=N\}=\{N=\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{R}\}$

4.4 D'après ce que nous avons fait dans la question **4.1**

<u>Equation $DN-ND=-N$</u>

$$\begin{aligned}
N=b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &\iff P^{-1}MP=b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
&\iff M=bP\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}\quad \text{multiplications à gauche par } P\text{, à droite par } P^{-1}\\
&\iff M=b\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}\\
&\iff M=b\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}\\
&\iff M=b\begin{pmatrix}3&-1\\9&-3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion :}\ E(-1,\varphi_A)=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}3&-1\\9&-3\end{pmatrix}\right)\ :\ \dim E(-1,\varphi_A)=1}$$

Equation $DN - ND = N$

$$N = c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff M = cP\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$\iff M = c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\iff M = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\iff M = c\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion : } E(1,\varphi_A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right) \ : \dim E(1,\varphi_A) = 1}$$

5)

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4.

φ_A est un endomorphisme d'un espace de dimension 4, il possède 3 valeurs propres $-1, 0, 1$ et la somme des dimensions des trois sous-espaces propres associés est égale à 4 : **l'endomorphisme φ_A est diagonalisable**

EXERCICE III

3.1 Mode paiement de la clientèle

1)

1.1)

- S et U ne prennent que les valeurs 0 et 1 : ce sont des variables de Bernoulli.

On obtient la loi de S comme loi marginale du couple (S, U)

- Loi de S

$P(S = 0) = P(S = 0 \cap U = 0) + P(S = 0 \cap U = 1) = 0,4 + 0,3 = 0,7$

$P(S = 1) = 1 - P(S = 0) = 0,3$

S suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,3$

- Loi de U

$P(U = 0) = P(U = 0 \cap S = 0) + P(U = 0 \cap S = 1) = 0,4 + 0,2 = 0,6$

$P(U = 1) = 1 - 0,6 = 0,4$

U suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,4$

- L'événement " le client paie par carte bancaire " est l'événement $(U = 0)$, dont la probabilité est $0,6 = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

1.2)

$\text{cov}(S, U) = E(SU) - E(S)E(U)$.

La variable SU ne prend que les valeurs 0 et 1 ; c'est aussi une variable de Bernoulli : son espérance existe et vaut son paramètre, c'est-à-dire $E(SU) = P(SU = 1) = P(S = 1 \cap U = 1) = 0,1$

$E(S) = P(S = 1) = 0,3$ et $E(U) = P(U = 1) = 0,4$.

Par suite $\boxed{\text{cov}(S, U) = 0,1 - 0,4 \times 0,3 = -0,02}$

$$\boxed{\text{cov}(S, U) \neq 0 \Longrightarrow S \text{ et } U \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Remarque : On avait ce résultat plus simplement, car

$P(S = 0 \cap U = 0) = 0,4$ et $P(S = 0) \times P(U = 0) = 0,7 \times 0,6 = 0,42 \neq 0,4$

1.3)

L'événement " la somme payée est strictement supérieure à 50 euros est l'événement $(S = 1)$; l'événement " le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire " est l'événement $(U = 1)$.

On veut $P_{U=1}(S = 1) = \dfrac{P(S = 1 \cap U = 1)}{P(U = 1)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$

2)

2.1)

Chaque expérience " le client paie par carte bancaire " est une expérience de Bernoulli, de paramètre $P(U = 0) = 0,6$. Comme les modes de paiement des différents clients sont indépendants les uns des autres, ces expériences de Bernoulli le sont aussi.

La variable C_n prend pour valeurs le nombre de succès (paiement par cartes bancaires) obtenus au cours de la réalisation de n expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre $0,6$

$$\boxed{\textbf{La variable } C_n \textbf{ suit la loi binomiale de paramètres } (n; 0,6)}$$

$$E(C_n) = 0,6 \times n \text{ et } V(C_n) = 0,24 \times n$$

2.2)

• $L_1(\Omega) = [\![0, n]\!]$ car le premier succès (utilisation de la carte bancaire) peut se produire à un rang quelconque entre 1 et n et si cet événement ne se produit pas, on donne à L_1 la valeur 0.

Notons, pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, U_k la variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur 1 si et seulement si le k ème acheteur utilise une carte bancaire et la valeur 0 sinon. **La variable U_k suit la même loi que U et les variables U_k sont mutuellement indépendantes**.

$(L_1 = 0) = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} (U_j = 1)$.

Par indépendance des variables $P(L_1 = 0) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} P(U_j = 1) = \prod_{j=1}^{n} 0,4 = (0,4)^n$

Soit $k \in [\![2, n]\!]$;

$(L_1 = k) = \left(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k-1} (U_j = 1)\right) \cap (U_k = 0)$.

Toujours grâce à l'indépendance des variables U_j,

$P(L_1 = k) = \left(\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1} P(U_j = 1)\right) \times P(U_k = 0) = (0,4)^{k-1} \times 0,6$

$P(L_1 = 1) = P(U_1 = 0) = 0,6$; on remarque que la formule précédente est valable pour $k = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(L_1 = k) = (0,4)^{k-1} \times 0,6 \text{ et } P(L_1 = 0) = (0,4)^n}$$

• Vérifions que la somme des probabilités vaut bien 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{n} P(L_1 = k) + P(L_1 = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (0,4)^{k-1} \times 0,6 + (0,4)^n \\
&= 0,6 \frac{(0,4)^n - 1}{0,4 - 1} + (0,4)^n
\end{aligned}$$

On a reconnu la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $0,4 \neq 1$ et de premier terme $0,6$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(L_1=k) &= 0,6\frac{1-(0,4)^n}{1-0,4}+(0,4)^n\\ &= 0,6\frac{1-(0,4)^n}{0,6}+(0,4)^n\\ & 1-(0,4)^n+(0,4)^n=1\end{aligned}$$

2.3)

- Loi de L_2

$L_2(\Omega)=\{0,2,3\ldots,n\}$ car le deuxième succès peut apparaître à l'un quelconque des rangs entre 2 et n et s'il n'apparaît pas, alors la variable L_2 prend la valeur 0

$(L_2=0)$ est l'événement " il y a eu zéro succès ou un succès exactement " ;

$(L_2=0)=(C_n=0\cup C_n=1)$; c'est une réunion de deux événements incompatibles, donc

$$\begin{aligned}P(L_2=0) &= P(C_n=0)+P(C_n=1)\\ &= \binom{n}{0}(0,4)^n+\binom{n}{1}(0,6)(0,4)^{n-1}\\ &= (0,4)^n+n(0,6)(0,4)^{n-1}\\ &= (0,4)^{n-1}(0,4+0,6\times n)\end{aligned}$$

Soit $k\in [\![2,n]\!]$. Notons A_{k-1} l'événement " au cours des $k-1$ premières expériences, il y a eu exactement 1 succès "

Alors $(L_2=k)=A_{k-1}\cap(U_k=1)$. Par indépendance des expériences, les événements A_{k-1} et $(U_k=1)$ sont indépendants, il s'ensuit que $P(L_2=k)=P(A_{k-1})P(U_k=1)$.

La variable qui compte au cours des $(k-1)$ premières expériences le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $(k-1;0,6)$ (même justification que pour C_n).

Donc $P(A_{k-1})=\binom{k-1}{1}(0,4)^{k-2}(0,6)=(k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)$

$P(L_2=k)=(k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)(0,6)=(k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)^2$.

En résumé :

$$\boxed{P(L_2=0)=(0,4)^{n-1}(0,4+0,6\times n) \text{ et } \forall k\in[\![2,n]\!],\ P(L_2=k)=(k-1)(0,4)^{k-2}(0,6)^2}$$

3.2)

1)

Une densité de X est la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

$$E(X)=1 \text{ et } V(X)=1$$

2)

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (puisque c'est la fonction nulle) et sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque c'est le produit de deux fonctions continues.
- La fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$; on reconnaît l'intégrale qui vaut l'espérance de X :

donc cette intégrale existe et vaut 1. Or f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge et vaut 0.

Conclusion : L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est la somme de deux intégrales convergentes, donc elle converge, et vaut 1

$$\boxed{\textbf{La fonction } f \textbf{ est bien une densité de probabilité}}$$

- La variable T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument

convergente. Sur $\mathbb{R}_-^*$, $xf(x)$ est nulle, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$ est nulle, donc absolument convergente.

Sur $\mathbb{R}_+$, $xf(x) = x^2e^{-x}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ est absolument convergente car elle vaut $E(X^2)$.

> T admet une espérance puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente en tant que somme de deux intégrales absolument convergentes. De plus $E(T) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ (d'après la relation de Köenig-Huygens), donc $E(T) = 1 + 1 = 2$
>
> Le temps de passage moyen en caisse est donc de 2 unités

2.1)

Rappelons : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = P(T \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Si $x < 0$: l'intervalle d'intégration $]-\infty, x]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty, 0[$, sur lequel f est nulle, donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_T(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \geq 0 : F_T(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \quad \text{(les deux intégrales existent)} \\
&= 0 + \int_0^x te^{-t}dt
\end{aligned}$$

Faisons dans cette dernière intégrale une intégration par parties :

$u(t) = t \Longrightarrow u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{-t} \Longleftarrow v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont des classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned}
\int_0^x te^{-t}dt &= \big[-te^{-t}\big]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt \\
&= -xe^{-x} - \big[e^{-t}\big]_0^x \\
&= -xe^{-x} - (e^{-x} - 1) \\
&= -(x+1)e^{-x} + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a alors } F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

2.2)

On veut $P_{T\geq 1}(T \leq 2)$

$$\begin{aligned}
P_{T\geq 1}(T \leq 2) &= \frac{P(T \geq 1 \cap T \leq 2)}{P(T \geq 1)} \\
&= \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{1 - P(T < 1)} \\
&= \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\
&= \frac{1 - 3e^{-2} - (1 - 2e^{-1})}{1 - (1 - 2e^{-1})} \\
&= \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{2e^{-1}} \\
&= 1 - \frac{3}{2e}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_{T\geq 1}(T \leq 2) = 1 - \frac{3}{2e} = \frac{2e - 3}{2e}}$$

3)

3.1)

M est égal au minimum de T_A et de T_B, car dès que l'un des deux clients a terminé, M n'attend plus et se présente au guichet.

On pourrait dire aussi : soit $t \geq 0$; dire que $M \geq t$ équivaut à dire qu'aucun des clients A et B n'a terminé avant le temps t, donc cela équivaut à dire que $(T_A \geq t)$ et $(T_B \geq t)$, donc cela revient à dire que $(t \leq T_A)$ et $(t \leq T_B)$, donc cela revient à dire que $t \leq \min(T_A, T_B)$

$$\boxed{M \geq t \Longleftrightarrow \min(T_A, T_B) \geq t : \text{donc } M = \min(T_A, T_B)}$$

3.2)

Soit $t \in \mathbb{R}$. Reprenons le raisonnement précédent.

$P(M > t) = (T_A > t) \cap (T_B > t)$, donc par indépendance des variables T_A et T_B, on a :

$$\begin{aligned} P(M > t) &= P(T_A > t)P(T_B > t) \\ &= (1 - P(T_A \leq t))^2 \quad \text{car } T_A \text{ et } T_B \text{ suivent la même loi.} \end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - P(M \leq t) = (1 - P(T \leq t))^2$ car T_A suit la même loi que T

Finalement $\forall t \in \mathbb{R},\ P(M \leq t) = 1 - (1 - F_T(t))^2$

- Si $t < 0$, $F_T(t) = 0$, donc $P(M \leq t) = 1 - 1 = 0$.
- Si $t \geq 0$, $F_T(t) = 1 - (t+1)e^{-t}$, donc $1 - F_T(t) = (t+1)e^{-t}$ et

$P(M \leq t) = 1 - ((t+1)e^{-t})^2 = 1 - (t+1)^2 e^{-2t}$

$$\boxed{\text{En résumé : } P(M \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$

3.3)

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ F_M(t) = P(M \leq t)$. On sait que F_M est une fonction de répartition (définie sur $\mathbb{R}$, croissante, $\lim\limits_{t \to -\infty} F_M(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_M(t) = 1$) ; cela peut se vérifier facilement avec l'expression de F_M.

Il faut maintenant montrer que F_M est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en un nombre fini de points.

Sur $\mathbb{R}_-^*$, F_M est nulle, donc continue et de classe C^1.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto (t+1)^2$ est continue, de classe C^1 en tant que fonction polynomiale. $t \mapsto e^{-2t}$ est continue, de classe C^1 en tant que carré d'une fonction continue, de classe C^1 (en effet $e^{-2t} = (e^{-t})^2$). Donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto (t+1)^2 e^{-2t}$ est continue et de classe C^1.

$\lim\limits_{t \to 0^-} F_M(t) = 0$ sans problème.

$\lim\limits_{t \to 0^+} F_M(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} (1 - (t+1)^2 e^{-2t}) = 1 - 1 = 0 = F_M(0)$

Finalement, F_M est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

$$\boxed{\text{Tous les ingrédients sont réunis : } M \text{ est une variable à densité}}$$

- Regardons si F_M est dérivable et continue au point $t = 0$.

Sur $\mathbb{R}_-^+$, F_M est dérivable et $\forall t > 0,\ F_M'(t) = 0$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, F_M est dérivable et

$\forall t > 0,\ F_M'(t) = -2(t+1)e^{-2t} + 2(t+1)^2 e^{-2t} = 2t(t+1)e^{-2t}$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{t \to 0^+} F_M'(t) = 0$

Dans ces conditions : $F_M'(0) = 0$ **et** F_M' **est continue en** 0. C'est ce que l'on voit souvent appeler, de manière incorrecte, le théorème de prolongement des applications de classe C^1 qui est ici utilisé, à savoir :

F_M est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} F_M'(x) \in \mathbb{R}$, alors $F_M'(0)$ existe et vaut $\lim\limits_{x \to 0} F_M'(x) \in \mathbb{R}$.

Nous prendrons donc $f_M = F_M'$.

$$\boxed{\text{Une densité } f_M \text{ de } M \text{ est : } f_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t(t+1)e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$