

2

Mathématiques

Option Economique

■ Mercredi 18 avril 2007 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

1. EXERCICE.

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1.1. Etude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur \mathbb{R}^{*+} et dresser le tableau de variation de f_a .
4. En déduire que :

$$\forall t > 0 \quad f_a(t) \geq a$$

1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?
2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :

$$\forall t > a \quad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier n , non nul :

$$u_n \geq a$$

4. Prouver alors que pour tout entier n non nul :

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.
6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n) , de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x)(1+y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.
3. Vérifier que :

$$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. EXERCICE.

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice A suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

2.1. Diagonalisation de A .

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A .
2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

$$A = PDP^{-1}$$

Donner l'écriture matricielle de P^{-1} .

2.2. Diagonalisation de ϕ_A .

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A . En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A .
3. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :

$$DN - ND = \lambda N$$

4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
 - a. Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.
 - b. En déduire que la famille (A, M_1) avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre $\text{Ker}\phi_A$ associé à la valeur propre 0.
 - c. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.
 - d. En déduire une base de chaque sous-espace propre E_{λ_1} et E_{λ_2} associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2 .
5. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?

3. EXERCICE.

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

3.1. Mode de paiement de la clientèle.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0.4$$

$$P[S = 0 \cap U = 1] = 0.3$$

$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0.2$$

$$P[S = 1 \cap U = 1] = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

- a. Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \frac{3}{5}$.
 - b. Calculer la covariance du couple (S, U) . Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
 - c. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus. Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$). On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
 - C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
 - L_1 (resp. L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp. du 2^{ème}) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp. au moins deux) et à zéro sinon.
 - a. Reconnaître la loi de C_n , rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

b. Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n P[L_1 = k] = 1$$

c. Déterminer la loi de L_2 .

3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X .
2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera. Quel est le temps moyen de passage en caisse ?
3. a. Démontrer que la fonction de répartition de T , notée F_T est définie par :

$$\begin{aligned} \forall x < 0 & \quad F_T(x) = 0 \\ \forall x \geq 0 & \quad F_T(x) = 1 - (x + 1)e^{-x} \end{aligned}$$

- b. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\frac{2e - 3}{2e}$.
4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.
 - a. M désignant le temps d'attente du client C exprimer M en fonction de T_A et T_B .

b. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & P[M \leq t] = 1 - (1+t)^2 e^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} & P[M \leq t] = 0 \end{cases}$$

c. Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M .



ANNALES DE MATHEMATIQUES



ECRICOME 2007 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE I

1.1 Etude de la fonction f_a

1) _____

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(t + \frac{a^2}{t} \right) = +\infty \text{ sans problème car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{t} = 0, \text{ donc } \boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f_a(t) = +\infty}$$

- $f_a(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{2t}$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f_a(t) - \frac{1}{2}t) = 0$. On en conclut que la droite "oblique" d'équation $y = \frac{1}{2}t$ est asymptote à la courbe de f_a au voisinage de $+\infty$.

Remarque : on peut rappeler que deux fonctions g et h sont asymptotes au voisinage de $+\infty$ si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (g(t) - h(t)) = 0$.

D'autre part, pour $t > 0$, $\frac{a^2}{t} > 0$, donc $f_a(t) - \frac{1}{2}t > 0$ ou encore $f_a(t) > \frac{1}{2}t$. Cela signifie que pour tout $t > 0$ (donc au voisinage de $+\infty$ en particulier), la courbe de f_a est au dessus de son asymptote.

2) _____

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}t = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2}{2t} = +\infty$ implique $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_a(t) = +\infty$.

Graphiquement cela indique que l'axe des ordonnées du repère dans lequel est construite la courbe de f_a est asymptote à cette courbe.

3) _____

Sur \mathbb{R}_+^* , $t \mapsto \frac{a^2}{t}$ est continue, dérivable en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $t \mapsto t + \frac{a^2}{t}$ aussi et f_a est continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

$$\begin{aligned} \forall t > 0, f'_a(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right) \\ &= \frac{t^2 - a^2}{2t^2} = (t - a) \frac{t + a}{2t^2} \end{aligned}$$

Pour tout $t > 0$, $\frac{t+a}{2t^2} > 0$, donc le signe de $f'_a(t)$ est le même que celui de $(t - a)$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

t	0	a	$+\infty$
$f'_a(t)$		-	0
f_a	$+\infty$	\searrow	a
		\nearrow	$+\infty$

4)

Le tableau de variations précédent fait apparaître clairement que la fonction f_a présente un minimum absolu au point $t = a$, dont la valeur est a . Donc

$$\forall t > 0, f_a(t) \geq a$$

1.2 Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1)

Si $u_0 = a$, alors $u_1 = f_a(u_0) = f_a(a) = a$ d'après l'étude précédente. Supposons que $u_n = a$ pour un entier n donné, alors $u_{n+1} = f_a(u_n) = f_a(a) = a$. Nous venons de montrer par récurrence que si $u_0 = a$, la suite (u_n) est constante et égale à a .

2)

$$\bullet f'_a(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right) - \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2t^2}.$$

On conclut que $\forall t > 0$, $f'_a(t) - \frac{1}{2} < 0$, donc $f'_a(t) < \frac{1}{2}$; en particulier pour $t > a$.

• Si $t > a > 0$, alors par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R}_+ , on a $t^2 > a^2 > 0$. En divisant par $t^2 > 0$, il vient $1 > \frac{a^2}{t^2}$; donc $1 - \frac{a^2}{t^2} > 0$.

Conclusion : pour $t > a$, on a $f'_a(t) > 0$ et par conséquent $\forall t > a, 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$

3)

• On montre d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$u_0 > 0$ par hypothèse; supposons $u_n > 0$ pour un entier naturel n donné. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq a$ d'après 1.4) puisque $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$. La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

Remarque : cela revient à dire et à utiliser le fait que l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f . En effet, d'après le tableau de variations de f , $f(]0, +\infty[) = [a, +\infty[\subset]0, +\infty[$.

• Puis d'après le tableau de variations de la question 1.3), $\forall n > 0$, $u_n = f(u_{n-1}) \geq a$ puisque u_{n-1} existe ($n-1 \geq 0$) et $u_{n-1} > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq a$$

Remarque : cela veut dire que $\forall n \geq 1$, u_n appartient à l'intervalle $[a, +\infty[$

4)

La fonction f_a est continue, dérivable sur $[a, +\infty[$. De plus, d'après la question 2.2), sur cet intervalle, $0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$, donc $|f'_a(t)| \leq \frac{1}{2}$.

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à f_a entre a et u_n .

$$\forall n \geq 1, |f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|u_n - a| \text{ soit encore } |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|,$$

puisque $f_a(a) = a$.

Mais on sait que $\forall k \geq 1$, $u_k \geq a$, donc on a $0 \leq u_{n+1} - a$ et $0 \leq u_n - a$. L'inégalité précédente devient :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Remarque : On aurait pu dire aussi :

$$0 \leq f'_a(t) \leq \frac{1}{2}, f(u_n) - f(a) \geq 0 \text{ et } u_n - a \geq 0, \text{ donc :}$$

$$0 \times (u_n - a) \leq f(u_n) - f(a) \leq \frac{1}{2}(u_n - a), \text{ soit } 0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a).$$

- Montrons l'inégalité $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ par récurrence sur $n \geq 1$

Initialisation : $|u_1 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$, donc $|u_1 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$

Hérédité : supposons l'inégalité satisfaite pour un entier $n \geq 1$ donné ;

on a donc $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.

Multiplions les deux termes de cette inégalité par $\frac{1}{2} > 0$, on obtient $\frac{1}{2}|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$.

Or, d'après l'inégalité des accroissements finis précédente, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$. La comparaison des deux inégalités donne $|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$

L'inégalité est donc héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est satisfaite pour tout $n \geq 1$.

$$\forall n \geq 1, |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5) _____

La suite $n \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, elle converge donc vers 0.

L'encadrement $0 \leq |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ permet de conclure que la suite $n \mapsto |u_n - a|$ est convergente et que sa limite est nulle. Il en résulte que

$$\text{La suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

6) _____

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$, c'est que $f_{\sqrt{2}}(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right)$

PROGRAMME ECRICOME2007 ;

var k : integer ;

u : real ;

BEGIN

u := 1 ; k := 1 ; writeln('u(1,1)=', u) ;

for k := 2 to 100 do begin

u := (u + 2/u) / 2 ;

writeln('u(', k, ') = ', u) ;

end ;

END.

1.3 Recherche d'un extremum d'une fonction de deux variables

1) _____

La fonction g est le produit d'une fraction rationnelle $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{x+y}{2xy}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et du polynôme $(x, y) \mapsto (1+x)(1+y)$ qui sont tous les deux continus, de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de \mathbb{R}^2 .

g est donc une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{1+y}{2} \left(-\frac{1}{x^2}(1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \right) \\ &= \frac{1+y}{2} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{1+y}{2} \times \frac{x^2 - y}{x^2 y} \end{aligned}$$

En remarquant que $g(x, y) = g(y, x)$, le même calcul donnera

$$\text{Pour tout } (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1+x}{2} \times \frac{y^2-x}{y^2x}.$$

Le couple (x, y) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point critique de g si et seulement si (x, y) est solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$ puisque $\frac{1+y}{2} \times \frac{1}{x^2y}$ et $\frac{1+x}{2} \times \frac{1}{y^2x}$ sont strictement positifs sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Soit encore $x^2 = y$ et $x = y^2$, donc par substitution, $y^4 = y$ et $x = y^2$. Puisque x et y sont strictement positifs, $y^4 = y$ équivaut à $y^3 = 1$. La fonction $t \mapsto t^3$ est une bijection de \mathbb{R}_+^* sur lui-même, donc l'équation $y^3 = 1$ y admet une seule solution $y = 1$. La deuxième équation $x = y^2$ donne alors $x = 1$.

La fonction g admet sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ un unique point critique $(x, y) = (1, 1)$

2)

La fonction g étant de classe \mathcal{C}^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, le théorème de Schwarz donne $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y)$

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1+y}{2} \left(\frac{2}{x^3} \right) = r(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1+x}{2} \left(\frac{2}{y^3} \right) = t(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1+y}{2} \times \frac{-1}{y^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = s(x, y)$$

Au point critique $(1, 1)$, $(s^2 - rt)(1, 1) = 1 - 2 \times 2 = -3 < 0$. Il y a donc un extremum local. De plus $r(1, 1) = 2 > 0$, donc il s'agit d'un minimum local

3)

$$\begin{aligned} 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) &= 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right). \\ g(x, y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x+y+xy) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + x\right). \end{aligned}$$

On a bien $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) = g(x, y)$

La valeur du minimum local est $g(1, 1) = 4$. D'après la question 1.4), on sait que $\forall t > 0, f_a(t) \geq a$, donc $\forall t > 0, f_1(t) \geq 1$.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f_1(x) \geq 1, f_1(y) \geq 1 \text{ et } f_1\left(\frac{x}{y}\right) \geq 1 \implies g(x, y) \geq 4 = g(1, 1)$$

Au point $(1, 1)$, la fonction g admet un minimum absolu puisque $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, g(x, y) \geq g(1, 1)$

EXERCICE II

2.1 Diagonalisation de A

1) _____

Il suffit de faire le calcul : $A^2 = A$.

- Le polynôme $X^2 - X$ est donc un polynôme annulateur de A puisque $A^2 - A = (0)$. On sait qu'alors les valeurs propres possibles de A sont solutions de l'équation $x^2 - x = 0$.

Les valeurs propres possibles de A sont 0 ou 1 : $\text{spect}(A) \subset \{0, 1\}$

Pour ceux qui ne connaissent pas ce résultat :

Si λ est valeur propre de A , il existe $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X \neq (0)$, telle que $AX = \lambda X$. Donc $A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Or $A(AX) = A^2 X = AX = \lambda X$. On obtient l'égalité : $\lambda X = \lambda^2 X$ et puisque $X \neq (0)$, cela implique $\lambda^2 = \lambda$, ce qui est le résultat annoncé.

2) _____

Considérons l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique. Dans cette base, la matrice A est associée à un endomorphisme f et l'on sait que f et A ont les mêmes valeurs propres, et que f diagonalisable équivaut à A diagonalisable.

Raisonnons sur f .

- Détermination de $\text{Ker } f$:

$u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à $\text{Ker } f$ si et seulement si $f(x, y) = (0, 0)$. Cette égalité équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \text{ Effectuons } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ on obtient le système équivalent}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $(x, y) \in \text{Ker } f \iff y = 3x$ $\text{Ker } f = \{u = (x, 3x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 3))$.Si l'on note, d'une manière générale $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à λ , on a :

$E_0(f) = \text{vect}((1, 3)) : \dim E_0(f) = 1$

- Détermination de $\text{Ker}(f - \text{Id})$:

$$f(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases} \text{ Effectuons } L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, \text{ on obtient le système équivalent}$$

suisant $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

 $\text{Ker}(f - \text{Id}) \neq \{0\}$; par suite $\text{Ker}(f - \text{Id}) = E_1(f)$.

$E_1(f) = \{u = (x, 2x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 2)) : \dim E_1(f) = 1$

Conclusion :

f est un endomorphisme d'un espace de dimension 2 ; la somme des dimensions de ses deux sous-espaces propres vaut 2, donc f (et par conséquent A) est diagonalisable

Remarque : on aurait pu dire aussi : f est un endomorphisme d'un espace de dimension 2 qui admet deux valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable (c'est une condition suffisante de diagonalisabilité).

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la formule de changement de base pour les endomorphismes (ou les matrices carrées) permet d'écrire :

$$A = PDP^{-1}$$

- Détermination de P^{-1}

On résout le système $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui est équivalent à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ équivaut à :

$$\begin{cases} x + y = a \\ 3x + 2y = b \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{matrix} \iff \begin{cases} x + y = a \\ -y = b - 3a \end{cases} \iff \begin{cases} y = -b + 3a \\ x = a - (-b + 3a) = -2a + b \end{cases}$$

En mettant ces résultats sous forme matricielle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On en déduit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2.2. Diagonalisation de φ_A

1) _____

D'après les propriétés de calcul dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a déjà $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi

$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \Phi_A(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $(M, M') \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_A(M + \lambda M') &= A(M + \lambda M') - (M + \lambda M')A \\ &= AM + \lambda AM' - MA - \lambda M'A \\ &= (AM - MA) + \lambda(AM' - M'A) \\ &= \varphi_A(M) + \lambda \varphi_A(M') \end{aligned}$$

On vient de montrer que $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

2) _____

- Calculons, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi_A^3(M)$

$$\begin{aligned} \varphi_A^2(M) &= \varphi_A(AM - MA) \\ &= A(AM - MA) - (AM - MA)A \\ &= A^2M - 2AMA + MA^2 = AM - 2AMA + MA \quad \text{car } A^2 = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_A^3(M) &= \varphi_A(AM - 2AMA + MA) \\ &= A(AM - 2AMA + MA) - (AM - 2AMA + MA)A \\ &= A^2M - 2A^2MA + AMA - AMA + 2AMA^2 - MA^2 \\ &= AM - 2AMA + 2AMA - MA \end{aligned}$$

$$\varphi_A^3(M) = AM - MA = \varphi_A(M)$$

Conclusion : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi_A^3(M) - \varphi_A(M) = (0)$, ce qui veut dire $\varphi_A^3 - \varphi_A = 0$

Le polynôme $X^3 - X$ est donc un polynôme annulateur de φ_A

On en déduit, comme on l'a fait au 2.1.1) que les valeurs propres possibles de φ_A sont les racines de l'équation $x^3 - x = 0$, c'est-à-dire 0 ou -1 ou 1.

$\text{spect}(\varphi_A) \subset \{-1, 0, 1\}$

3)

$M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est vecteur propre de φ_A associé à une valeur propre λ si et seulement si $M \neq (0)$ et $\varphi_A(M) = \lambda M$, c'est-à-dire

$$AM - MA = \lambda M \quad (1)$$

Or $N = P^{-1}MP$, donc $M = PNP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$. Remplaçons M et A par leurs valeurs dans (1), cela donne

$$\begin{aligned} AM - MA = \lambda M &\iff PD \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} NP^{-1} - PN \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} DP^{-1} = \lambda PNP^{-1} \\ &\iff PDNP^{-1} - PNDP^{-1} = \lambda PNP^{-1} \\ &\iff P(DN - ND)P^{-1} = \lambda PNP^{-1} \end{aligned}$$

Multiplions cette dernière égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P , il vient

$$AM - MA = \lambda M \iff P^{-1}P(DN - ND)P^{-1}P = \lambda P^{-1}PNP^{-1}P, \text{ donc finalement}$$

$$AM - MA = \lambda M \iff DN - ND = \lambda N$$

Rappelons peut-être que, lorsque l'on multiplie les deux termes d'une égalité matricielle par une matrice inversible (multiplication à droite ou à gauche), on obtient une égalité équivalente.

4)

* 4.1

- Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} DN - ND &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation $DN - ND = (0)$ équivaut à $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = (0)$, donc à $b = c = 0$

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi_A &= \{N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / b = c = 0\} \\ &= \{N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), (a, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{N = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), (a, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

* 4.2

Revenons aux matrices M :

$M = PNP^{-1}$, donc

$$N = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff P^{-1}MP = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Multiplions les deux termes}$$

de cette égalité par P à gauche et P^{-1} à droite, on obtient

page 7

Jean MALLET

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$\begin{aligned}
M &= P\left(a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1} \\
&= aP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + dP \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Ker } \varphi_A = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \right) = \text{vect}(A_1, A)$

Remarque : On peut tout de suite noter que

- $\dim \text{Ker } \varphi_A = 2$, puisque les matrices A et A_1 ne sont pas proportionnelles et forment donc une famille libre.
- $\text{Ker } \varphi_A = E(0, \varphi_A)$ (sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 0).

*** 4.3**

- Résolvons l'équation $DN - ND = (-1)N = -N$. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; cette égalité équivaut à $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, ce qui donne $a = c = d = 0$

$$\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / DN - ND = -N\} = \{N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$$

- Résolvons l'équation $DN - ND = N$. Avec les mêmes notations, cette égalité équivaut à $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; ce qui donne $a = b = d = 0$

$$\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / DN - ND = N\} = \{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$$

4.4 D'après ce que nous avons fait dans la question **4.1**

Equation $DN - ND = -N$

$$\begin{aligned}
N = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff P^{-1}MP = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff M = bP \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{multiplications à gauche par } P, \text{ à droite par } P^{-1} \\
&\iff M = b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&\iff M = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&\iff M = b \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $E(-1, \varphi_A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right) : \dim E(-1, \varphi_A) = 1$

Equation $DN - ND = N$

$$\begin{aligned}
 N = c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\iff M = cP \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &\iff M = c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\iff M = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\iff M = c \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $E(1, \varphi_A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \right) : \dim E(1, \varphi_A) = 1$

5) _____

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4.

φ_A est un endomorphisme d'un espace de dimension 4, il possède 3 valeurs propres $-1, 0, 1$ et la somme des dimensions des trois sous-espaces propres associés est égale à 4 : **l'endomorphisme φ_A est diagonalisable**

EXERCICE III**3.1 Mode paiement de la clientèle**

1) _____

1.1) _____

- S et U ne prennent que les valeurs 0 et 1 : ce sont des variables de Bernoulli.

On obtient la loi de S comme loi marginale du couple (S, U)

- Loi de S

$$P(S = 0) = P(S = 0 \cap U = 0) + P(S = 0 \cap U = 1) = 0,4 + 0,3 = 0,7$$

$$P(S = 1) = 1 - P(S = 0) = 0,3$$

 S suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,3

- Loi de U

$$P(U = 0) = P(U = 0 \cap S = 0) + P(U = 0 \cap S = 1) = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$P(U = 1) = 1 - 0,6 = 0,4$$

 U suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,4

- L'événement " le client paie par carte bancaire " est l'événement $(U = 0)$, dont la probabilité est $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

1.2) _____

$$\text{cov}(S, U) = E(SU) - E(S)E(U).$$

La variable SU ne prend que les valeurs 0 et 1 ; c'est aussi une variable de Bernoulli : son espérance existe et vaut son paramètre, c'est-à-dire $E(SU) = P(SU = 1) = P(S = 1 \cap U = 1) = 0,1$

$$E(S) = P(S = 1) = 0,3 \text{ et } E(U) = P(U = 1) = 0,4.$$

$$\text{Par suite } \boxed{\text{cov}(S, U) = 0,1 - 0,4 \times 0,3 = -0,02}$$

$$\text{cov}(S, U) \neq 0 \implies S \text{ et } U \text{ ne sont pas indépendantes}$$

Remarque : On avait ce résultat plus simplement, car

$$P(S = 0 \cap U = 0) = 0,4 \text{ et } P(S = 0) \times P(U = 0) = 0,7 \times 0,6 = 0,42 \neq 0,4$$

1.3)

L'événement " la somme payée est strictement supérieure à 50 euros est l'événement $(S = 1)$; l'événement " le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire " est l'événement $(U = 1)$.

$$\text{On veut } P_{U=1}(S = 1) = \frac{P(S = 1 \cap U = 1)}{P(U = 1)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

2)

2.1)

Chaque expérience " le client paie par carte bancaire " est une expérience de Bernoulli, de paramètre $P(U = 0) = 0,6$. Comme les modes de paiement des différents clients sont indépendants les uns des autres, ces expériences de Bernoulli le sont aussi.

La variable C_n prend pour valeurs le nombre de succès (paiement par cartes bancaires) obtenus au cours de la réalisation de n expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre 0,6

La variable C_n suit la loi binomiale de paramètres $(n; 0,6)$

$$E(C_n) = 0,6 \times n \text{ et } V(C_n) = 0,24 \times n$$

2.2)

• $L_1(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ car le premier succès (utilisation de la carte bancaire) peut se produire à un rang quelconque entre 1 et n et si cet événement ne se produit pas, on donne à L_1 la valeur 0.

Notons, pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, U_k la variable aléatoire de Bernoulli qui prend la valeur 1 si et seulement si le $k^{\text{ème}}$ acheteur utilise une carte bancaire et la valeur 0 sinon. **La variable U_k suit la même loi que U et les variables U_k sont mutuellement indépendantes.**

$$(L_1 = 0) = \bigcap_{j=1}^n (U_j = 1).$$

$$\text{Par indépendance des variables } P(L_1 = 0) = \prod_{j=1}^n P(U_j = 1) = \prod_{j=1}^n 0,4 = (0,4)^n$$

Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$;

$$(L_1 = k) = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} (U_j = 1) \right) \cap (U_k = 0).$$

Toujours grâce à l'indépendance des variables U_j ,

$$P(L_1 = k) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} P(U_j = 1) \right) \times P(U_k = 0) = (0,4)^{k-1} \times 0,6$$

$P(L_1 = 1) = P(U_1 = 0) = 0,6$; on remarque que la formule précédente est valable pour $k = 1$.

Finalement : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(L_1 = k) = (0,4)^{k-1} \times 0,6$ et $P(L_1 = 0) = (0,4)^n$

• Vérifions que la somme des probabilités vaut bien 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^n P(L_1 = k) + P(L_1 = 0) \\ &= \sum_{k=1}^n (0,4)^{k-1} \times 0,6 + (0,4)^n \\ &= 0,6 \frac{(0,4)^n - 1}{0,4 - 1} + (0,4)^n \end{aligned}$$

On a reconnu la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $0,4 \neq 1$ et de premier terme 0,6.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(L_1 = k) &= 0,6 \frac{1 - (0,4)^n}{1 - 0,4} + (0,4)^n \\ &= 0,6 \frac{1 - (0,4)^n}{0,6} + (0,4)^n \\ &= 1 - (0,4)^n + (0,4)^n = 1 \end{aligned}$$

2.3)

- Loi de L_2

$L_2(\Omega) = \{0, 2, 3, \dots, n\}$ car le deuxième succès peut apparaître à l'un quelconque des rangs entre 2 et n et s'il n'apparaît pas, alors la variable L_2 prend la valeur 0

$(L_2 = 0)$ est l'événement " il y a eu zéro succès ou un succès exactement " ;

$(L_2 = 0) = (C_n = 0 \cup C_n = 1)$; c'est une réunion de deux événements incompatibles, donc

$$\begin{aligned} P(L_2 = 0) &= P(C_n = 0) + P(C_n = 1) \\ &= \binom{n}{0} (0,4)^n + \binom{n}{1} (0,6)(0,4)^{n-1} \\ &= (0,4)^n + n(0,6)(0,4)^{n-1} \\ &= (0,4)^{n-1}(0,4 + 0,6 \times n) \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Notons A_{k-1} l'événement " au cours des $k - 1$ premières expériences, il y a eu exactement 1 succès "

Alors $(L_2 = k) = A_{k-1} \cap (U_k = 1)$. Par indépendance des expériences, les événements A_{k-1} et $(U_k = 1)$ sont indépendants, il s'ensuit que $P(L_2 = k) = P(A_{k-1})P(U_k = 1)$.

La variable qui compte au cours des $(k - 1)$ premières expériences le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $(k - 1; 0,6)$ (même justification que pour C_n).

$$\text{Donc } P(A_{k-1}) = \binom{k-1}{1} (0,4)^{k-2} (0,6) = (k-1)(0,4)^{k-2} (0,6)$$

$$P(L_2 = k) = (k-1)(0,4)^{k-2} (0,6)(0,6) = (k-1)(0,4)^{k-2} (0,6)^2.$$

En résumé :

$$P(L_2 = 0) = (0,4)^{n-1}(0,4 + 0,6 \times n) \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, P(L_2 = k) = (k-1)(0,4)^{k-2} (0,6)^2$$

3.2)

1)

Une densité de X est la fonction f_X définie sur \mathbb{R} par $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$E(X) = 1 \text{ et } V(X) = 1$$

2)

- La fonction f est définie sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R}_* (puisque c'est la fonction nulle) et sur \mathbb{R}_+^* puisque c'est le produit de deux fonctions continues.

- La fonction f est positive ou nulle sur \mathbb{R}

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$; on reconnaît l'intégrale qui vaut l'espérance de X :

donc cette intégrale existe et vaut 1. Or f est nulle sur \mathbb{R}_* , l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et vaut 0.

Conclusion : L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est la somme de deux intégrales convergentes, donc elle converge, et vaut 1

La fonction f est bien une densité de probabilité

- La variable T admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument

convergente. Sur \mathbb{R}_* , $xf(x)$ est nulle, donc $\int_{-\infty}^0 xf(x)dx$ est nulle, donc absolument convergente.

Sur \mathbb{R}_+ , $xf(x) = x^2e^{-x}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ est absolument convergente car elle vaut $E(X^2)$.

T admet une espérance puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente en tant que somme de deux intégrales absolument convergentes. De plus $E(T) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ (d'après la relation de Kœnig-Huygens), donc $E(T) = 1 + 1 = 2$

Le temps de passage moyen en caisse est donc de 2 unités

2.1)

Rappelons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Si $x < 0$: l'intervalle d'intégration $] - \infty, x]$ est inclus dans l'intervalle $] - \infty, 0[$, sur lequel f est nulle, donc $\forall x \in] - \infty, 0[$, $F_T(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \geq 0 : F_T(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \quad (\text{les deux intégrales existent}) \\ &= 0 + \int_0^x te^{-t}dt \end{aligned}$$

Faisons dans cette dernière intégrale une intégration par parties :

$u(t) = t \implies u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{-t} \iff v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont des classe C^1 sur \mathbb{R}_+ , l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-t}dt &= [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= -xe^{-x} - [e^{-t}]_0^x \\ &= -xe^{-x} - (e^{-x} - 1) \\ &= -(x+1)e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

On a alors $F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2.2)

On veut $P_{T \geq 1}(T \leq 2)$

$$\begin{aligned} P_{T \geq 1}(T \leq 2) &= \frac{P(T \geq 1 \cap T \leq 2)}{P(T \geq 1)} \\ &= \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{1 - P(T < 1)} \\ &= \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{1 - 3e^{-2} - (1 - 2e^{-1})}{1 - (1 - 2e^{-1})} \\ &= \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{2e^{-1}} \\ &= 1 - \frac{3}{2e} \end{aligned}$$

$P_{T \geq 1}(T \leq 2) = 1 - \frac{3}{2e} = \frac{2e - 3}{2e}$

3)

3.1)

M est égal au minimum de T_A et de T_B , car dès que l'un des deux clients a terminé, M n'attend plus et se présente au guichet.

On pourrait dire aussi : soit $t \geq 0$; dire que $M \geq t$ équivaut à dire qu'aucun des clients A et B n'a terminé avant le temps t , donc cela équivaut à dire que $(T_A \geq t)$ et $(T_B \geq t)$, donc cela revient à dire que $(t \leq T_A)$ et $(t \leq T_B)$, donc cela revient à dire que $t \leq \min(T_A, T_B)$

$$M \geq t \iff \min(T_A, T_B) \geq t : \text{donc } M = \min(T_A, T_B)$$

3.2)

Soit $t \in \mathbb{R}$. Reprenons le raisonnement précédent.

$P(M > t) = (T_A > t) \cap (T_B > t)$, donc par indépendance des variables T_A et T_B , on a :

$$\begin{aligned} P(M > t) &= P(T_A > t)P(T_B > t) \\ &= (1 - P(T_A \leq t))^2 \quad \text{car } T_A \text{ et } T_B \text{ suivent la même loi.} \end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 - P(M \leq t) = (1 - P(T \leq t))^2$ car T_A suit la même loi que T

$$\text{Finalement } \forall t \in \mathbb{R}, P(M \leq t) = 1 - (1 - F_T(t))^2$$

- Si $t < 0$, $F_T(t) = 0$, donc $P(M \leq t) = 1 - 1 = 0$.
- Si $t \geq 0$, $F_T(t) = 1 - (t + 1)e^{-t}$, donc $1 - F_T(t) = (t + 1)e^{-t}$ et $P(M \leq t) = 1 - ((t + 1)e^{-t})^2 = 1 - (t + 1)^2 e^{-2t}$

$$\text{En résumé : } P(M \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (t + 1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

3.3)

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_M(t) = P(M \leq t)$. On sait que F_M est une fonction de répartition (définie sur \mathbb{R} , croissante, $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_M(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_M(t) = 1$) ; cela peut se vérifier facilement avec l'expression de F_M .

Il faut maintenant montrer que F_M est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sauf peut-être en un nombre fini de points.

Sur \mathbb{R}_-^* , F_M est nulle, donc continue et de classe C^1 .

Sur \mathbb{R}_+^* , $t \mapsto (t + 1)^2$ est continue, de classe C^1 en tant que fonction polynomiale. $t \mapsto e^{-2t}$ est continue, de classe C^1 en tant que carré d'une fonction continue, de classe C^1 (en effet $e^{-2t} = (e^{-t})^2$). Donc, sur \mathbb{R}_+^* , $t \mapsto (t + 1)^2 e^{-2t}$ est continue et de classe C^1 .

$\lim_{t \rightarrow 0^-} F_M(t) = 0$ sans problème.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F_M(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 - (t + 1)^2 e^{-2t}) = 1 - 1 = 0 = F_M(0)$$

Finalement, F_M est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .

Tous les ingrédients sont réunis : M est une variable à densité

- Regardons si F_M est dérivable et continue au point $t = 0$.

Sur \mathbb{R}_-^+ , F_M est dérivable et $\forall t > 0$, $F'_M(t) = 0$

Sur \mathbb{R}_+^* , F_M est dérivable et

$$\forall t > 0, F'_M(t) = -2(t + 1)e^{-2t} + 2(t + 1)^2 e^{-2t} = 2t(t + 1)e^{-2t}. \text{ Il s'ensuit que } \lim_{t \rightarrow 0^+} F'_M(t) = 0$$

Dans ces conditions : $F'_M(0) = 0$ et F'_M est continu en 0. C'est ce que l'on voit souvent appeler, de manière incorrecte, le théorème de prolongement des applications de classe C^1 qui est ici utilisé, à savoir :

F_M est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et $\lim_{x \rightarrow 0} F'_M(x) \in \mathbb{R}$, alors $F'_M(0)$ existe et vaut $\lim_{x \rightarrow 0} F'_M(x) \in \mathbb{R}$.

Nous prendrons donc $f_M = F'_M$.

$$\text{Une densité } f_M \text{ de } M \text{ est : } f_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t(t + 1)e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$