ECRICOME Eco 2012

EXERCICE 1

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3\mathbb{R}$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{nIN}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = L + A^n (U_0 - L).$$

Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note :
- Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;
- $\mathrm{Im}(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
- $\mathrm{Im}(Id - a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{Id} - a$.

2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si

$$-x + y + z = 0$$

puis montrer que :

$$\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - a)$$

3. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a.
4. Écrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans cette base de vecteurs propres.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

6. En écrivant convenablement D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n :

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G.$$

Explicitér uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

7. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que :

$$L' = DL' + B'$$

8. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie :

$$L = AL + B.$$

9. Établir que $EL = 0$.
10. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

EXERCICE 2.

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire le développement limité de $f(x)$ l'ordre 2, au voisinage de 0 En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Étudier les variations de φ ;. En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$$

   Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$'.
3. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x)\, dx$$

4. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3.

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot du n feuilles originales qu'elle a numérotées $l,\ 2,\ \cdots,\ n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant . suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la, boite et elle recommence.
On modélise l'expérience par un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boite lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).
On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = \mathrm{P}(A_n)$.

1. Calculer a_n.
2. Étude de T_2. On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.
   a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(T_2 = k) = (1 - a_2)(a_2)^{k-2}$.
   b) Justifier que la variable $S_2 = T_2 - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de T_2 en fonction de a_2
3. Étude de T_3. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.
   a) Calculer $\mathrm{P}(T_3 = 2)$ puis $\mathrm{P}(T_3 = 3)$ en fonction de a_2 et a_3
   b) A l'aide du système complet d'événements $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ démontrer pour tout $k \geq 2$ que :
   $$\mathrm{P}(T_3 = k+1) = (1 - a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k) + a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k)$$
   c) Montrer que :
   $$k \geq 2, \quad \mathrm{P}(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].$$
   d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(T_3 = k)$.
   e) Prouver que la variable aléatoire $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$. Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3.
   f) Établir que la variable aléatoire $T_3(T_3 - 1)$ admet une espérance et donner sa valeur en fonction de a_2 et a_3.
   En déduire que T_3 admet une variance.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

ECRICOME 2012 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

1)

Procédons par récurrence.

Initialisation : $n = 0$; $L + A^0(U_0 - L) = L + I(U_0 - L) = U_0$.

Hérédité : supposons l'égalité vraie pour un entier naturel n donné.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B \\ &= A(L + A^n(U_0 - L)) + B \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= AL + A^{n+1}(U_0 - L) + B \\ &= L + A^{n+1}(U_0 - L) \quad \text{(d'après l'énoncé)} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et, d'après le principe du raisonnement par récurrence, on peut dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = L + A^n(U_0 - L)}$$

2)

- Nous allons donner deux démonstrations pour cette question.
- Première idée.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $\quad u \in \operatorname{Im} b \iff \exists\, v = (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ u = b(v)$.

Cela se traduit matriciellement par : $\exists \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

Cette égalité matricielle équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} 3X - Y - 2Z &= x \\ X \quad\quad - Z &= y \quad L_2 \longleftarrow 3L_2 - L_1 \\ 2X - Y - Z &= z \quad L_3 \longleftarrow 3L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3X - Y - 2Z &= x \\ Y - Z &= 3y - x \\ -Y + Z &= 3z - 2x \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3X - Y - 2Z &= x \\ Y - Z &= 3y - x \\ 0 &= -3x + 3y + 3z \end{cases}$$

Les deux premières équations constituent un système de Cramer pour les inconnues X et Y (et ceci pour toute valeur de Z). Les trois équations ont une solution si et seulement si la dernière ligne est satisfaite.

$$\boxed{u = (x, y, z) \text{ appartient à } \operatorname{Im} b \text{ si et seulement si } -x + y + z = 0}$$

- Deuxième idée.

D'après le cours, $\operatorname{Im} b = \operatorname{vect}(b(e_1), b(e_2), b(e_3))$ si nous notons $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La lecture de la matrice B de b donne.

$\operatorname{Im} b = \operatorname{vect}((3, 1, 2), (-1, 0, -1), (-2, -1, -1))$. On constate que $(3, 1, 2) + (-1, 0, -1) + (-2, -1, -1) = (0, 0, 0)$ ce qui veut dire $(-2, -1, -1) = -(3, 1, 2) - (-1, 0 - 1)$; il en résulte que :

$\operatorname{Im} b = \operatorname{vect}((3,1,2),(-1,0,-1))$. Les vecteurs $(3,1,2),(-1,0,-1)$ forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires, ils constituent donc une base de $\operatorname{Im} b$.

$u = (x,y,z) \in \operatorname{Im} b \iff \exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; u = \alpha(3,1,2) + \beta(-1,0,-1)$. Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta & = x \\ \alpha & = y \quad L_2 \longleftarrow 3L_2 - L_1 \\ 2\alpha - \beta & = z \quad L_3 \longleftarrow 3L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha - \beta & = x \\ \beta & = 3y - x \\ -\beta & = 3z - 2x \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\alpha - \beta & = x \\ \beta & = 3y - x \\ 0 & = -3x + 3y + 3z \end{cases}$$

On retrouve la même situation que précédemment.

- $\operatorname{Mat}_{B_c}(\operatorname{Id} - a) = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

La somme des trois colonnes est nulle ce qui veut dire que $(\operatorname{Id} - a)(e_3) = -(Id - a)(e_1) - (\operatorname{Id} - a)(e_2)$.

$\operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) = \operatorname{vect}((\operatorname{Id} - a)(e_1), (\operatorname{Id} - a)(e_2)) = \operatorname{vect}(\frac{1}{6}(6,4,2), \frac{1}{6}(-3,0,-3)) = \operatorname{vect}((6,4,2),(-3,0,-3))$

Or $-6 + 4 + 2 = 0$, donc $(6,4,2) \in \operatorname{Im} b$; $-(-3) + 0 + 3 = 0$, donc $(-3,0,-3) \in \operatorname{Im} b$.

Conséquence $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha(6,4,2) + \beta(-3,0,-3) \in \operatorname{Im} b$ donc $\operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) \subset \operatorname{Im} b$.

On a vu que la famille $((3,1,2),(-1,0,-1))$ est une base de $\operatorname{Im} b$, donc $\dim \operatorname{Im} b = 2$.

De même $\dim \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) = 2$.

$$\boxed{\operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) \subset \operatorname{Im} b \;;\; \dim \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) = \dim \operatorname{Im} b \text{ impliquent } \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - a) = \operatorname{Im} b}$$

3)

Trois calculs sans problème donnent :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces résultats indiquent que les réels 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont des valeurs propres de A, donc de a. Comme A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle n'admet pas d'autres valeurs propres :

$$\operatorname{spect}(a) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$$

L'endomorphisme a est diagonalisable (il satisfait à une condition suffisante de diagonalisabilité), ses sous-espaces propres, que nous noterons $E(\lambda, a)$, sont de dimension 1.

Les résultats précédents permettent d'écrire :

$E(1,a) = \operatorname{vect}((1,1,1))$; $E(\frac{1}{2}, a) = \operatorname{vect}((1,0,1))$ et $E(\frac{1}{3}, a) = \operatorname{vect}((0,-1,1))$.

La famille de ces trois vecteurs est une base B_p de $\mathbb{R}^3$ puisque a est diagonalisable.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique B_c de $\mathbb{R}^3$ à la base B_p de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres $(1,1,1),(0,1,1),(0,-1,1)$.

4)

D'après ce que nous venons de dire, si nous notons $D = \operatorname{Diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, nous avons l'égalité $D = P^{-1}AP$ qui équivaut à $A = PDP^{-1}$

Dans la base propre B_p, la matrice de b est $B' = P^{-1}BP$.

Calcul de P^{-1}. Soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

L'équation $Y = PX$ d'inconnue X équivaut, puisque P est inversible, à $X = P^{-1}Y$. Résolvons donc l'équation $Y = PX$. Elle équivaut au système :

$$\begin{cases} x+y & = \alpha \\ x \quad -z & = \beta \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ x+y+z & = \gamma \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y & = \alpha \\ -y-z & = \beta - \alpha \\ z & = \gamma - \alpha \end{cases}$$

Ce système est triangulaire, de Cramer (on s'y attendait) ; la résolution donne :

$z = \gamma - \alpha$, puis $y = \alpha - \beta - z = \alpha - \beta - (\gamma - \alpha) = 2\alpha - \beta - \gamma$ et $x = \alpha - y = \alpha - (2\alpha - \beta - \gamma) = -\alpha + \beta + \gamma$.

Matricellement, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B' &= P^{-1}BP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5)

C'est un résultat classique, du cours, qui se fait par récurrence : nous le laissons au lecteur.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$$

6)

On sait également que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \text{Diag}(1, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{3})\right)^n)$. D'où le calcul,

$$\begin{aligned} A^n &= P\,\text{Diag}(1, \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \left(\tfrac{1}{3})\right)^n)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\ &= \underbrace{P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=E} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \underbrace{P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=F} + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \underbrace{P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=G} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = E + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n F + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n G}$$

Calcul explicite de E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$\text{E}=\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

7)

$$DL' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{2} & \frac{q}{2} \\ 0 & 0 & \frac{r}{3} \end{pmatrix}.$$

$$L' = DL' + B' \quad \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{2} & \frac{q}{2} \\ 0 & 0 & \frac{r}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p & = \frac{p}{2} + 1 \\ q & = \frac{q}{2} - 1 \\ r & = \frac{r}{3} + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p & = 2 \\ q & = -2 \\ r & = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

8)

$$\begin{aligned} PL'P^{-1} &= P(DL' + B')P^{-1} = PDL'P^{-1} + PB'P^{-1} \\ &= P(P^{-1}AP)L'P^{-1} + B = PP^{-1}APL'P^{-1} + B \\ &= APL'P^{-1} + B = AL + B \quad \text{(d'après la définition de } L\text{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{L = AL + B}$$

9)

- Calculons L.

$$\begin{aligned} L &= PL'P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & -8 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$EL = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix} = (0)$$

$$\boxed{EL = (0)}$$

10)

$$\begin{aligned}U_n &= L + A^n(U_0 - L)\\ &= L + \left(E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G\right)(U_0 - L)\\ &= L + EU_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n FU_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^n GU_0 - \underbrace{EL}_{=(0)} - \left(\frac{1}{2}\right)^n FL - \left(\frac{1}{3}\right)^n GL\\ &= L + EU_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n FU_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^n GU_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n FL - \left(\frac{1}{3}\right)^n GL\end{aligned}$$

Les coefficients de $\left(\frac{1}{2}\right)^n FU_0$ et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n FL$ sont des multiples de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $|\frac{1}{2}| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Il s'ensuit que tout ces coefficients ont pour limite 0 .

Il en est de même avec $\left(\frac{1}{3}\right)^n GU_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^n GL$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il en résulte que la limite des coefficients de la matrice}\\ L+EU_0+\left(\frac{1}{2}\right)^n FU_0+\left(\frac{1}{3}\right)^n GU_0-\left(\frac{1}{2}\right)^n FL-\left(\frac{1}{3}\right)^n GL \text{ sont ceux de } L+EU_0\end{array}}$$

EXERCICE II

Partie I : étude d'une fonction

1)

Faisons un développement limité à l'ordre 3 de e^{-x} au voisinage de 0.

$e^{-x} = 1 - x + \dfrac{(-x)^2}{2} + \dfrac{(-x)^3}{3!} + (-x)^3\varepsilon(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$1 - e^{-x} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, donc

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$; la fonction f est continue en 0. De plus $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que l'exponentielle, donc par composition $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, +\infty[$. La fonction f est, sur $]0, +\infty[$, le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas : la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est continue en 0 et sur }]0, +\infty[, \text{ donc } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$$

2)

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x) - 1}{x}\\ &= \frac{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)}{x}\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + x\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$$

Remarque : d'après le cours, la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 équivaut à la dérivabilité de f en 0 et le coefficient de x dans le développement limité est $f'(0)$.

3)

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (mêmes arguments que dans la question 1) en changeant l'adjectif continue en dérivable).

$\forall x>0,\ f'(x)=\dfrac{xe^{-x}-(1-e^{-x})}{x^2}=\dfrac{xe^{-x}-1+e^{-x}}{x^2}.$

La fonction φ cherchée est $\varphi\ :\ x\mapsto xe^{-x}-1+e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ (et même sur $\mathbb{R}$). On a $\forall x>0,\ f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}.$

$\forall x>0,\ \varphi'(x)=e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}=-xe^{-x}<0$ puisque $x>0$ ainsi que l'exponentielle.

x	0		$+\infty$
φ	0	$\searrow$	

$\varphi(0)=0$, donc $\forall x>0,\ \varphi(x)<0$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x)<0}$$

4)

Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x})=1\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$

Partie II : étude d'une suite

1)

$\forall u\in[0,n],\ 0\leq u\leq n\iff -n\leq -u\leq 0\iff -1\leq -\frac{u}{n}\leq 0$ (on a divisé les 3 termes de l'encadrement par $n>0$.)

Par croissance de l'exponentielle, $\frac{1}{e}\leq \exp(-\frac{u}{n})\leq 1$. On multiplie les 3 termes de l'encadrement par $\dfrac{1}{1+u}>0$ sur $[0,n]$ et l'on obtient :

$\dfrac{1}{e(1+u)}\leq\dfrac{\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}\leq\dfrac{1}{1+u}.$ Les bornes d'intégration 0 et n sont dans l'ordre croissant, les fonctions à intégrer sont continues, on peut intégrer entre 0 et n cet encadrement, il vient :

$\dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^n\frac{du}{1+u}\leq\int_0^n\frac{\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du\leq\int_0^n\frac{du}{1+u}.$ Comme on veut une minoration, seul les deux premiers termes de l'encadrement nous intéressent et l'on obtient :

$$\frac{1}{e}\left[\ln|1+u|\right]_0^n\leq\int_0^n\frac{\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du\iff\frac{1}{e}\ln(n+1)\leq\int_0^n\frac{\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\ln(n+1)=+\infty\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$$

2)

La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ existe et est réelle.

3)

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^n \frac{du}{1+u} - u_n = \int_0^n \frac{du}{1+u} - \int_0^n \frac{\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du = \int_0^n \frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du.$

Pour $u \geq 0$, $-\frac{u}{n} \leq 0$, donc $\exp(-\frac{u}{n}) \leq 1$ par croissance de l'exponentielle et par suite $1-\exp(-\frac{u}{n}) \geq 0$. De plus $u \geq 0 \Longrightarrow 1+u > 0$, donc $\dfrac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u} \geq 0$. Les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, donc $\displaystyle\int_0^n \frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du \geq 0$.

- De plus, $1+u \geq u$. Pour $0 < u \Longrightarrow 0 < 1+u \leq u$, donc $0 < \dfrac{1}{1+u} \leq \dfrac{1}{u}$. On a donc successsivement,

$$\begin{aligned}\frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u} &\leq \frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{u} \quad \text{(on a multiplié l'inégalité précédente par } 1-\exp(-\tfrac{u}{n}) \geq 0)\\ &\leq \frac{1}{n}\frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{\frac{u}{n}}\\ &\leq \frac{1}{n}f(\frac{u}{n})\end{aligned}$$

Pour $u = 0$, $\dfrac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u} = 0$ et l'on a bien $0 \leq \frac{1}{n}f(0)$ car $f(0) = 1$.

Conclusion : $\forall u \in [0, n],\ \dfrac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u} \leq \frac{1}{n}f(\frac{u}{n})$.

Intégrons cette inégalité entre 0 et n $(0 < n)$, il vient : $\displaystyle\int_0^n \frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du \leq \int_0^n \frac{1}{n}f(\frac{u}{n})du$.

Effectuons dans la deuxième intégrale le changement de variable $t = \frac{u}{n}$; $dt = \frac{1}{n}du$, donc $du = ndt$.

On obtient $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{n}f(\frac{u}{n})du = \int_0^1 f(t)dt$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^n \frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du \leq \int_0^1 f(t)dt$; or $\displaystyle\int_0^n \frac{1-\exp(-\frac{u}{n})}{1+u}du = \int_0^n \frac{du}{1+u} - u_n$, donc il vient

$$\boxed{0 \leq \int_0^n \frac{du}{1+u} - u_n \leq \int_0^1 f(t)dt}$$

4)

L'encadrement précédent équivaut successivement à :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^n \frac{du}{1+u} - \int_0^1 f(t)dt \leq u_n \leq \int_0^n \frac{du}{1+u}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(1+n) - \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \leq u_n \leq \ln(1+n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \dfrac{1}{\ln(1+n)}\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \leq \frac{u_n}{\ln(1+n)} \leq 1$ après avoir divisé l'encadrement précédent par $\ln(1+n) > 0$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(1+n) = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}\int_0^1 f(t)dt = 0$, donc par le théorème d'encadrement on déduit l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(1+n)}$ et sa valeur $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(1+n)} = 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(1+n)} = 1 \Longleftrightarrow u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \ln(1+n)}$$

EXERCICE III

1)

Le tirage se faisant simultanément et les originaux et les copies étant indiscernables, on peut prendre pour Ω l'ensemble des parties à deux éléments distincts pris parmi les $2n$ éléments constitués par les n copies et les n originaux. On met sur cet univers la probabilité uniforme.

$\text{Card}(\Omega) = \binom{2n}{2} = \dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$.

Il y a n paires qui réalisent l'événement $\overline{A_n}$, ce sont les n paires formées de l'original et de sa copie, donc $a_n = P(A_n) = 1 - \dfrac{n}{n(2n-1)} = 1 - \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{(2n-1)-1}{2n-1}$: $\boxed{a_n = \dfrac{2n-2}{2n-1}}$

2–a)

T_2 compte le nombre de tirages nécessaires pour vider la boîte lorsqu'elle contient 2 originaux et leurs 2 copies.

$T_2(\Omega) = \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Pour $k \geq 2$, l'événement $[T_2 = k]$ est : au cours des $k-1$ premiers tirages, on n'a jamais tiré un original et sa copie, sinon au tirage suivant on aurait vidé la boîte.

Notons pour $j \in \mathbb{N}^*$, S_j est l'événement " au j ème tirage on tire un original et sa copie ".

Supposons dans un premier temps que $k \geq 3$.

$[T_2 = k] = \left(\bigcap_{j=1}^{k-2} \overline{S_j}\right) \cap S_{k-1} \cap S_k$. On applique la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P(\overline{S_1})P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \cdots P_{\overline{S_1}\ldots\overline{S_{k-3}}}P(\overline{S_{k-2}})P_{\overline{S_1}\ldots\overline{S_{k-2}}}P(S_{k-1})P_{\overline{S_1}\ldots\overline{S_{k-2}}S_{k-1}}P(S_k) \\ &= \underbrace{a_2.a_2\cdots a_2}_{k-2 \text{ termes}}(1-a_2).1 \quad \text{(car lorsque l'on ne tire pas un original et sa copie,} \\ &\qquad \text{pour le tirage suivant, la boîte a la même composition que pour le premier tirage)} \\ &= a_2^{k-2}(1-a_2) \end{aligned}$$

Pour $k = 2$, $P(T_2 = 2) = P(S_1) = 1 - a_2 = a_2^{2-2}(1-a_2)$.

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ P(T_2 = k) = a_2^{k-2}(1-a_2)}$$

2–b)

$S_2 = T_2 - 1$, donc $S_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(S_2 = k) = P(T_2 = k+1) = a_2^{k-1}(1-a_2)$.

D'après la première question $a_2 = \dfrac{2}{3}$, donc $1 - a_2 = \dfrac{1}{3} \in]0,1[$. On peut affirmer :

La variable S_2 suit la loi géométrique de paramètre $1 - a_2 = \dfrac{1}{3}$.

D'après la cours, $E(S_2)$ existe et $E(S_2) = \dfrac{1}{1-a_2} = 3$. Donc $T_2 = S_2 + 1$ admet une espérance et par linéarité de l'espérance $E(T_2) = E(S_2) + 1 = \dfrac{1}{1-a_2} + 1 = \dfrac{2-a_2}{1-a_2}$.

Toujours d'après le cours, $V(S_2) = V(T_2 + 1) = V(T_2)$, donc $V(T_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}$

$$\boxed{E(T_2) = \dfrac{2-a_2}{1-a_2} \text{ et } V(T_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}}$$

3–a)

Il faut au moins 3 tirages pour vider l'urne lorsqu'elle contient 3 originaux et leurs 3 copies.

$[T_3 = 2] = \emptyset$, donc $P(T_3 = 2) = 0$.

$[T_3 = 3] = S_1 \cap S_2$; donc $P(T_3 = 3) = P(S_1)P_{S_1}(S_2) = (1-a_3)(1-a_2)$, en effet : $S_1 = \overline{A_3}$ et si l'on a tiré au premier tirage un original et sa copie, ils sont retirés de l'urne et pour le deuxième tirage, la boîte contient 2 originaux et leurs 2 copies. $P_{S_1}(S_2) = P(T_2 = 2) = 1 - a_2$ d'après la question précédente.

$$P(T_3 = 2) = 0 \text{ et } P(T_3 = 3) = (1-a_3)(1-a_2)$$

3–b)

Utilisons le système complet d'événements $\{A_3, \overline{A_3}\}$. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2,\ P(T_3 = k+1) &= P(A_3)P_{A_3}(T_3 = k+1) + P(\overline{A_3})P_{\overline{A_3}}P(T_3 = k+1) \\
&= P(A_3)P(T_3 = k) + (1 - P(A_3))P(T_2 = k) \\
&= a_3 P(T_3 = k) + (1-a_3)P(T_2 = k)
\end{aligned}$$

Explications des probabilités conditionnelles :

Lorsque A_3 est réalisé, pour le tirage suivant la composition de la boîte n'a pas changé : il y a toujours 6 éléments dans la boîte ; on a déjà fait un tirage, donc il en reste k à effectuer pour vider la boîte, d'où $P(T_3 = k)$.

Lorsque $\overline{A_3}$ est réalisé, pour le tirage suivant on enlève l'original tiré et sa copie, il reste alors 4 éléments dans la boîte et il reste k tirages pour la vider, d'où $P(T_2 = k)$.

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ P(T_3 = k+1) = a_3 P(T_3 = k) + (1-a_3)P(T_2 = k)}$$

3–c)

Notons H_k la propriété : $P(T_3 = k) = \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)$ pour $k \geq 2$.

Remarquons que $a_3 = \dfrac{4}{5}$ d'après la question 1), donc $a_3 - a_2 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{-2}{15} \neq 0$. L'expression à démontrer a un sens.

- Initialisation : $k = 2$. $P(T_3) = 2 = 0$ et

$$\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right] = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}(a_3^0 - a_2^2) = 0.$$

- Supposons la propriété satisfaite pour un entier $k \geq 2$ donné. D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
P(T_3 = k+1) &= a_3 P(T_3 = k) + (1-a_3)P(T_2 = k) \\
&= a_3 P(T_3 = k) + (1-a_3)a_2^{k-2}(1-a_2) \quad \text{(d'après la question 2–a) car } k \geq 2) \\
&= a_3 \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2)}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right) + (1-a_3)a_2^{k-2}(1-a_2) \\
&\qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= (1-a_2)(1-a_3)\left(\frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right) + a_2^{k-2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}) + (a_3 - a_2)a_2^{k-2}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-1} - a_3 a_2^{k-2} + a_3 a_2^{k-2} - a_2^{k-1}\right) \\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-1} - a_2^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence, on conclut :

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ P(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)}$$

3–d)

Les séries de termes général a_3^{k-2} et a_2^{k-2} sont des séries géométriques de raison respectives $a_3 = \dfrac{4}{5}$ et $a_2 = \dfrac{2}{3}$ convergentes car $|a_3| < 1$ ainsi que $|a_2|$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3=k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2)}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(a_3^{k-2}-a_2^{k-2}\right)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\sum_{k=2}^{+\infty} a_3^{k-2}-\sum_{k=2}^{+\infty} a_2^{k-2}\Big)\\
&\text{dans les deux sommes faisons le même changement d'indice } j=k-2\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} a_3^{j}-\sum_{j=0}^{+\infty} a_2^{j}\Big)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\frac{1}{1-a_3}-\frac{1}{1-a_2}\Big)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{1-a_2-(1-a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)}\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\frac{a_3-a_2}{(1-a_2)(1-a_3)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3=k)=1}$$

Remarque : on peut affirmer **maintenant** que T_3 eswt une variable aléatoire.

3–e)

Notons $S_3=T_3-1$. On a $S_3(\Omega)=\mathbb{N}^*-\{1\}$.

$\forall k\geq 2,\ P(S_3=k)=P(T_3=k+1)=\dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-1}-a_2^{k-1}\right)$

Les séries $\sum_{k\geq 2} ka_3^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 2} ka_2^{k-1}$ sont convergentes en tant que séries dérivées premières des séries géométriques $\sum_{k\geq 2} a_3^{k}$ et $\sum_{k\geq 2} a_2^{k}$ qui convergent pour les raisons indiquées précédemment.

Le terme général de la série de somme $E(S_3)$ est

$k\dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-1}-a_2^{k-1}\right)=\dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(k(a_3^{k-1}-ka_2^{k-1})\right)$. Cette série est à termes positifs (S_3 prend des valeurs entières), nous venons de voir qu'elle converge (donc elle converge absolument) : S_3 admet une espérance.

$$\begin{aligned}
E(S_3) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(k(a_3^{k-1}-ka_2^{k-1})\right)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{+\infty} k(a_3^{k-1}-ka_2^{k-1})\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\sum_{k=2}^{+\infty} ka_3^{k-1}-\sum_{k=2}^{+\infty} ka_2^{k-1}\Big)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\frac{1}{(1-a_3)^2}-1-(\frac{1}{(1-a_3)^2}-1)\Big)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_3)^2})\Big)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{(1-a_2)^2-(1-a_3)^2}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{(1-a_2-1+a_3)(1-a_2+1-a_3)}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2} \quad \text{(identité remarquable)}\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\times\frac{(a_3-a_2)(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}
\end{aligned}$$

$$E(S_3)=\frac{2-(a_2+a_2)}{(1-a_3)(1-a_2)}$$

$T_3=S_3+1$, donc T_3 admet une espérance donnée par $E(T_3)=E(S_3)+1=\dfrac{2-(a_2+a_2)}{(1-a_3)(1-a_2)}+1$

$$\boxed{E(T_3) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)+2-(a_2+a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)} = \frac{(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_2)+(1-a_3)}{(1-a_2)(1-a_3)}}$$

3–f)

Par le théorème du transfert, $E(T_3(T_3-1))$ existe si et seulement si la série de terme général $\dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(k(k-1)a_3^{k-2}-k(k-1)a_2^{k-2}\Big)$ converge (la convergence absolue est superflue car la série est à termes positifs). Les séries $\sum\limits_{k\geq 2} k(k-1)a_3^{k-2}$ et $\sum\limits_{k\geq 2} k(k-1)a_2^{k-2}$ convergent en tant que dérivée seconde des séries géométriques $\sum\limits_{k\geq 2} a_2^k$ et $\sum\limits_{k\geq 2} a_3^k$ convergentes (déjà vu).

La variable $T_3(T_3-1)$ admet une espérance

$$\begin{aligned}
E(T_3(T_3-1)) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_3^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_2^{k-2}\Big)\\
&= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\Big(\frac{2}{(1-a_3)^3} - \frac{2}{(1-a_2)^3}\Big)\\
&= \frac{2(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{(1-a_2)^3-(1-a_3)^3}{(1-a_3)^3(1-a_2)^3}\\
&= \frac{2(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{(1-a_2-1+a_3)\Big((1-a_2)^2+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3)^2\Big)}{(1-a_3)^3(1-a_2)^3}\\
&\qquad \text{(identité remarquable} \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))\\
&= \frac{2(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2} \times \frac{(a_3-a_2)\Big((1-a_2^2)+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3)^2\Big)}{(1-a_3)^3(1-a_2)^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(T_3(T_3-1) = 2 \times \frac{(1-a_2^2)+(1-a_2)(1-a_3)+(1-a_3)^2}{(1-a_3)^2(1-a_2)^2}}$$

Or $T_3^2 = T_3(T_3-1)+T_3$. Les deux variables $T_3(T_3-1))$ et T_3 admettent des espérances, donc par linéarité de l'espérance T_3 admet une espérance.

$$\boxed{T_3 \text{ admet une variance donnée par le théorème de König-Huygens : } V(T_3) = E(T_3)^2 - (E(T_3))^2}$$

Remarque : on a aussi $V(T_3) = E(T_3(T_3-1)) + E(T_3) - (E(T_3))^2$.