

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $f : [0, a] \rightarrow [0, b]$, continue strictement croissante, avec $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a) = b \end{cases}$. On note $g = f^{-1}$.

1. Montrer que $ab = \int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx$. (utiliser des sommes de Riemann.)

2. Montrer que : $\forall u \in [0, a], \forall v \in [0, b], uv \leq \int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application continue sur $[0, 1]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient f et g deux applications continues sur $[0, 1]$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, avec $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application de classe \mathcal{C}^3 sur $[a, b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $M_3 = \sup_{[a,b]} |f^{(3)}|$ et $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

On définit de même les sommes $S_n(f')$ et $S_n(f'')$.

1. Montrer que $\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) - \frac{b-a}{2n} S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} M_3$

2. Prouver que $\int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Pour $n \geq 1$ fixé, et pour $0 \leq k \leq n$, poser $x_k = \frac{ka}{n}$ et $y_k = f(x_k)$.

Considérer $S_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)g(y_k)$.

Il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^a f(x) dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \int_0^b g(x) dx$.

Établir ensuite que $S_n + S'_n = ab$, et conclure.

2. Vérifier que $\int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx - uv = \int_{f(u)}^v (g(x) - u) dx \geq 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Ecrire $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$ en séparant les indices pairs des indices impairs.

Constaté que S'_n et S''_n sont deux sommes de Riemann de f sur $[0, 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Poser $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ et $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)$.

Utiliser l'uniforme continuité de g pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - T_n) = 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

S_n est une somme de Riemann de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur $[0, 1]$. On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2(\sqrt{2} - 1)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Poser $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x_k et x , avec $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Intégrer terme à terme avant de sommer de $k = 0$ à $k = n-1$.

2. La question précédente donne un DL de $S_n(f)$.

Utiliser des DL analogues (mais de précision moindre) pour $S_n(f')$ et $S_n(f'')$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Soit n un entier positif. On pose $x_k = \frac{ka}{n}$ et $y_k = f(x_k)$, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$.

Les x_k forment une subdivision régulière σ de $[0, a]$. La fonction f étant croissante, les y_k forment une subdivision (à priori non régulière) de $[0, b]$ (on rappelle que $f(0) = 0$).

On considère les sommes de Riemann $S_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)g(y_k)$.

Lorsque $n \rightarrow \infty$, la somme S_n tend vers $\int_0^a f(x) dx$.

f étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est uniformément continue (Th de Heine.)

Il en découle que le "pas" de la subdivision σ' tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On en déduit que S'_n tend vers $\int_0^b g(x) dx$ quand $n \rightarrow +\infty$. D'autre part :

$$\begin{aligned} S_n + S'_n &= \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)x_k = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k \\ &= \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=1}^n x_{k-1} y_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{a}{n} - x_k + x_{k-1}\right)}_{=0} y_k + \left(\frac{a}{n} + x_{n-1}\right) b = ab \end{aligned}$$

Quand $n \rightarrow \infty$, l'égalité $S_n + S'_n = ab$ donne donc $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx = ab$.

2. On se donne $u \in [0, a]$ et $v \in [0, b]$.

D'après la question précédente, on a $\int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} g(x) dx = uf(u)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx - uv &= \int_0^u f(x) dx + \int_0^{f(u)} g(x) dx + \int_{f(u)}^v g(x) dx - uv \\ &= u(f(u) - v) + \int_{f(u)}^v g(x) dx = \int_{f(u)}^v (g(x) - u) dx \end{aligned}$$

Rappelons que l'application g , tout comme f , est croissante.

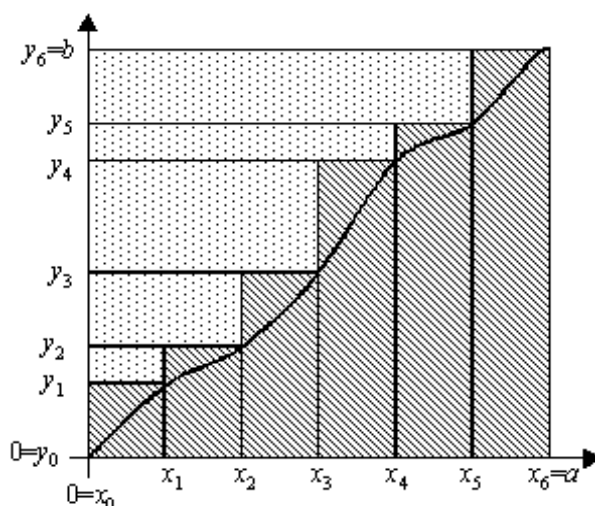
– Si $f(u) \leq v$, alors $u \leq g(x) \leq g(v)$ sur $[f(u), v]$.

– Si $v \leq f(u)$, alors $g(v) \leq g(x) \leq u$ sur $[v, f(u)]$.

Dans tous les cas, on a donc $\int_{f(u)}^v (g(x) - u) dx \geq 0$.

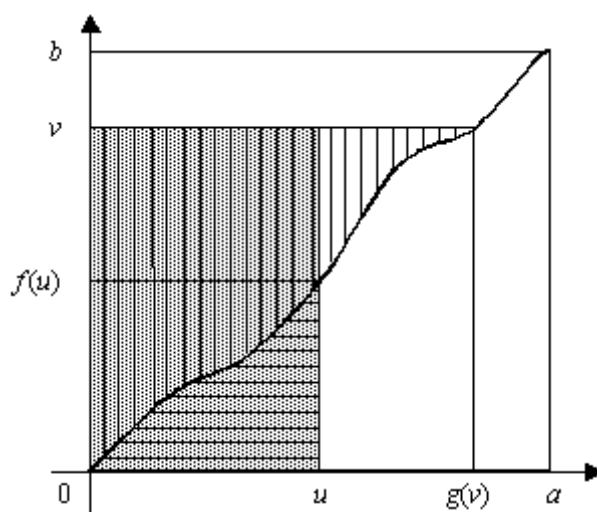
Compte tenu du calcul précédent, on en déduit $\int_0^u f(x) dx + \int_0^v g(x) dx \geq uv$.

3. Le schéma ci-dessous illustre l'idée de la démonstration de la première question. On y voit la subdivision (x_k) de $[0, a]$, ainsi que la subdivision (y_k) de $[0, b]$. La somme de Riemann S_6 de f est représenté par des hachures obliques. La somme de Riemann S'_6 de g est représentée par un nuage de points. On voit bien comment les sommes S_6 et S'_6 s'emboîtent de telle sorte que $S_6 + S'_6 = ab$.



Quand $n \rightarrow \infty$ on devine que S_n et S'_n tendent respectivement vers l'intégrale de f sur $[0, a]$ (aire du domaine situé sous la courbe $y = f(x)$ et dans le rectangle $[0, a] \times [0, b]$) et vers l'intégrale de $g = f^{-1}$ sur $[0, b]$ (aire du domaine situé au-dessus de la courbe $y = f(x)$ et dans le rectangle $[0, a] \times [0, b]$). Le fait que la somme des deux aires soit égale à ab est aussi particulièrement évident sur ce graphique.

Le dessin ci-dessous illustre la question 2. On s'est placé ici dans le cas $v \geq f(u)$. L'intégrale de f sur $[0, v]$ est hachurée horizontalement. Celle de g sur $[0, v]$ est hachurée verticalement. On voit que la somme de ces deux aires dépasse uv (le rectangle grisé.)



CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

On sépare $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$ en deux sommes, en fonction de la parité de l'indice k .

Ainsi $S_n = \frac{1}{2}(S'_n - S''_n)$, avec $S'_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f\left(\frac{2k}{n}\right)$ et $S''_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} f\left(\frac{2k+1}{n}\right)$.

Or S'_n et S''_n sont deux sommes de Riemann de f sur $[0, 1]$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = \int_0^1 f(x) dx$. Il en découle $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Posons $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ et $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Il reste donc à montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - T_n) = 0$.

On constate que $S_n - T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. L'application g étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine.)

Ainsi il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.

On en déduit que si $n \geq \frac{1}{\alpha}$, alors on a : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$.

Ainsi $n \geq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow |S_n - T_n| \leq \varepsilon U_n$, avec $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$.

Mais la suite (U_n) converge vers $\int_0^1 |f(x)| dx$: cette suite est donc bornée.

Il existe donc $M \geq 0$ et un entier $n \geq n_0$ tels que : $n \geq n_0 \Rightarrow |S_n - T_n| \leq M\varepsilon$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - T_n) = 0$, et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

On constate que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1)$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Pour simplifier les notations posons $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

$$\text{On peut écrire } R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx$$

On applique Taylor-Lagrange entre x_k et x , avec $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\left| f(x) - f(x_k) - (x - x_k)f'(x_k) - \frac{(x - x_k)^2}{2} f''(x_k) \right| \leq \frac{(x - x_k)^3}{6} M_3$$

On procède ensuite à une intégration sur $[x_k, x_{k+1}]$. On trouve

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - f(x_k) - (x - x_k)f'(x_k) - \frac{(x - x_k)^2}{2} f''(x_k) \right) dx \right| \leq \frac{M_3}{6} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)^3 dx$$

Autrement dit, compte tenu de ce que $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$:

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3} f''(x_k) \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^4} M_3$$

On en déduit, par sommation de $k = 0$ à $k = n-1$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx - \frac{(b-a)^2}{2n^2} f'(x_k) - \frac{(b-a)^3}{6n^3} f''(x_k) \right) \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} M_3$$

$$\text{Posons } S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), S_n(f') = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) \text{ et } S_n(f'') = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(x_k).$$

L'inégalité précédente devient :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) - \frac{b-a}{2n} S_n(f') - \frac{(b-a)^2}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{(b-a)^4}{24n^3} M_3$$

$$2. \text{ Ainsi } \int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} S_n(f') + \frac{(b-a)^2}{6n^2} S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

En agissant sur f' (à un rang moindre) et sur f'' (à un rang moindre encore), on trouve :

$$\int_a^b f'(x) dx = S_n(f') + \frac{b-a}{2n} S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \int_a^b f''(x) dx = S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Ainsi } S_n(f'') = \int_a^b f''(x) dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } S_n(f') = \int_a^b f'(x) dx - \frac{b-a}{2n} \int_a^b f''(x) dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit :

$$\int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} \int_a^b f'(x) dx - \frac{(b-a)^2}{12n^2} \int_a^b f''(x) dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{Finalement : } \int_a^b f(x) dx = S_n(f) + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$