Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ en utilisant des sommes de Riemman.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$, de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=pn} \frac{1}{k}$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = (\mathrm{C}_{2n}^{n})^{1/n}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[0,1]$, strictement positive.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Écrire $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \cdots$, et $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \cdots$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

S_n est une somme de Riemann de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, de pas $\dfrac{1}{n}$, sur le segment $[1, p]$.

Sa limite, quand n tend vers $+\infty$, est $\ln p$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\ln S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \ln x$ sur $[1, 2]$.

En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Constater que S_n est une somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Passer par une somme de Riemann de f sur $[0, 1]$, de pas $\dfrac{1}{n}$.

Utiliser la concavité de $x \mapsto \ln x$, puis passer à la limite quand $n \to +\infty$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k(b-a)}{n}\Big)$.

– On applique ce qui précède à l'application $x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$.

On obtient $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$.

– De même $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$, et $c_k = 1 + \dfrac{k}{n}$, avec $k \in \{0, n(p-1)\}$.

Les coefficients c_k forment une subdivision régulière de $[1, p]$, de pas $\dfrac{1}{n}$.

Avec ces notations, $\displaystyle S_n = \sum_{k=n}^{np} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n(p-1)} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n(p-1)} f(c_k)$.

On reconnait une somme de Riemann de f sur le segment $[1, p]$.

Sa limite, quand le pas $h = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0, est $\displaystyle\int_1^p f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^p = \ln p$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{np} \frac{1}{k} = \ln p$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On a $\displaystyle\ln S_n = \frac{1}{n} \ln \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n} \ln\Big(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (n+k)\Big) = \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{k}{n}\Big)$.

Ainsi $\ln S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \ln x$ sur $[1, 2]$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln S_n = \int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = [x \ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{\mathrm{e}}$.

Conclusion : lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On constate que $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soit $n \geq 1$ un entier, et la subdivision de $[0,1]$ définie par $x_k = \dfrac{k}{n}$.

On sait que la somme de Riemann $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)$ vérifie $\lim S_n = \displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$.

$x \mapsto \ln x$ est concave donc $S_n \leq \ln S'_n$, avec $S'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Or $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S'_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Quand $n \to +\infty$, l'inégalité $S_n \leq \ln S'_n$ donne donc $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021