Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ et $\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$ en utilisant des sommes de Riemman.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$, de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=pn} \frac{1}{k}$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = (\mathrm{C}_{2n}^{\,n})^{1/n}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit f une application continue sur $[0,1]$, strictement positive.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x) \, \mathrm{d}x \le \ln \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Écrire $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \cdots$, et $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \cdots$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

S_n est une somme de Riemann de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, de pas $\dfrac{1}{n}$, sur le segment $[1, p]$.

Sa limite, quand n tend vers $+\infty$, est $\ln p$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\ln S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \ln x$ sur $[1, 2]$.

En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Constater que S_n est une somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Passer par une somme de Riemann de f sur $[0, 1]$, de pas $\dfrac{1}{n}$.

Utiliser la concavité de $x \mapsto \ln x$, puis passer à la limite quand $n \to +\infty$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+\frac{k(b-a)}{n}\Big)$.

– On applique ce qui précède à l'application $x \mapsto x^2$ sur $[0,1]$.

On obtient $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$.

– De même $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$, et $c_k = 1 + \dfrac{k}{n}$, avec $k \in \{0, n(p-1)\}$.

Les coefficients c_k forment une subdivision régulière de $[1,p]$, de pas $\dfrac{1}{n}$.

Avec ces notations, $\displaystyle S_n = \sum_{k=n}^{np}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n(p-1)}\frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n(p-1)} f(c_k)$.

On reconnait une somme de Riemann de f sur le segment $[1,p]$.

Sa limite, quand le pas $h = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0, est $\displaystyle\int_1^p f(x)\,dx = [\ln x]_1^p = \ln p$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{np}\frac{1}{k} = \ln p$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On a $\displaystyle\ln S_n = \frac{1}{n}\ln\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(n+k)\Big) = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big)$.

Ainsi $\ln S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \ln x$ sur $[1,2]$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln S_n = \int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1 = \ln\frac{4}{\mathrm{e}}$.

Conclusion : lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend vers $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On constate que $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$ est une somme de Riemann de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soit $n \geq 1$ un entier, et la subdivision de $[0,1]$ définie par $x_k = \dfrac{k}{n}$.

On sait que la somme de Riemann $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)$ vérifie $\lim S_n = \displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$.

$x \mapsto \ln x$ est concave donc $S_n \leq \ln S'_n$, avec $S'_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Or $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S'_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Quand $n \to +\infty$, l'inégalité $S_n \leq \ln S'_n$ donne donc $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.