ECRICOME 2004
Voie Eco

1 EXERCICE

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1.1 Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
3. Déterminer la lmite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$
6. Montrer que f rélaise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unqiue réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y$$
8. Déterminer alors la bijection réciproqie f^{-1}

1.2 Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\,dx$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$$
En déduire l'ensemble de définition de F.

2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.

4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$

5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

1.3 Etude de la suite (u_n).

1. Calculer u_0 et u_1.

2. Effectuer une intégrationpar parties et calculer u_3.
(On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)

3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)

5. Justifier l'encadrement suivant :
$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$
en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

2 EXERCICE

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

2.1 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}

2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.

   a) Calculer la matrice T

   b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geq 3$.

3. En déduire que :
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$
où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.

4. Pour tout réel t, on défint la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

   a) Montrer que :
   $$\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)E(t') = E(t+t')$$

   b) Pour tout t réel, calculer $E(t)E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2, t.

   c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de I, A, A^2, t et n.

2.2 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Pour tout entier naturel n nonnul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :
$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est diagonalisable.

2. Déterminer une matrice Q d'ordre 2, inversible telle que
$$Q^{-1}BQ = D$$

3. Pour tout entier naturel n, montrer que :
$$B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$
exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.

5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Pour tout t réel, onpose alors :
$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$

a) Montrer que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

b) Déterminer les matrice E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait :

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$

c) Calculer E_1^2, E_2^2, $E_1 E_2$, $E_2 E_1$.

d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

3 Exercice

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.

   a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

   b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la premièer série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   a) Jusitifier soigneusement la formule :

   $$\forall k \geq 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

   b) Vérifier par le calcul que

   $$\sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) = 1$$

   c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

   d) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2).

   e) En déduire la loi de L_2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appelera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombrede fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

   b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

   c) Montrer que
$$\forall k \geq 2, \quad P\left(T_2 = k\right) = (k-1)\left(0.7\right)^2\left(0.3\right)^{k-2}$$

4. Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur A est une variable aléatoire Z qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

   Le prix en euros W de cette trammission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.

   a) Rappeler une densité f_Z de Z ainsi que sa fonction de répartition F_Z.

   b) Quel est le temps moyen (en seconde) de la transmission d'un message par le serveur A

   c) Exprimer W en fonction de Z.

   d) Montrer que mW est une variable al&atoire à densité. En déterminer une densité f_W

   e) Déterminer l'espérance de la variable W.

5. On suppose que le temps de transmission d'un message en seconde par le serveur B est reprèsenté par la variable aléatoire X dont une densité de probabilité f est donnée par :
$$\begin{cases} f(t) = te^{-t^2/2} \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   (On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

   a) Vérifier que f est bien une densité de probabiltié.

   b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

   c) Calculer l'espérance de la variable X.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

ECRICOME 2004 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE NUMERO 1

1.1 Etude de f

1.

On constate que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^2 > 0$. De plus $(-x)^2 = x^2$, donc $f(x) = f(-x)$.

La fonction f est paire

2.

$x \mapsto 1+x^2$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynomiale)et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue, dérivable sur } \mathbb{R}}$$

Ecrivons , $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$;

$f'(x) = 2x(-\frac{1}{2})(1+x^2)^{-1-\frac{1}{2}} = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Cette quantité est négative ou nulle sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

3.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2) = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

4.

Dressons le tableau de variations de f sur $[0,\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

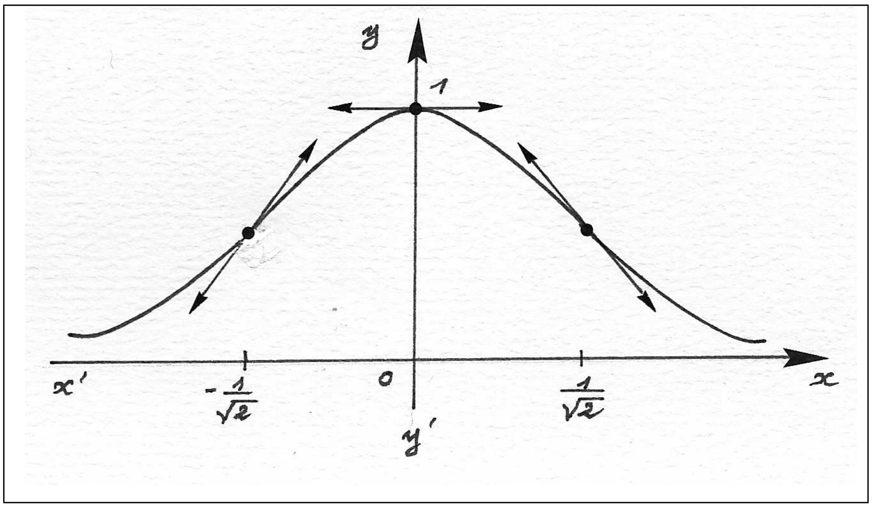
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Il apparaît sur le tableau de variations que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \le f(x) \le 1$. La fonction f est paire, donc on peut conclure :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \text{ et on a } \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \le f(x) \le 1.}$$

5.

Allure de la courbe :



6.

f est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$, donc c'est une bijection de cet intervalle sur son image $J =]0;1]$ d'après le tableau de variations.

7.

On sait, d'après la question précédente, que $\forall y \in]0;1]$, $\exists! x \in [0,+\infty[\ /\ y = f(x)$. Déterminer f^{-1} c'est exprimer x en fonction de y (car $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$). On va donc résoudre dans $[0,+\infty[$ l'équation $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, d'inconnue x, pour $y \in]0,1]$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &\Longleftrightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \\
&\Longleftrightarrow 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \ (\text{ car } y > 0) \\
&\Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2} \ \left(\geq 0 \quad \text{car } y \in]0;1]\right) \\
&\Longleftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}}
\end{aligned}$$

Comme $x \geq 0$, on obtient $x = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{y^2}}$ (car $x \geq 0$).

D'après ce que nous venons de dire :

$$\boxed{\forall y \in]0;1],\ f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}}}$$

1.2 Calcul d'aire

1.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > x^2$, donc, puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} > \sqrt{1+x^2}$, soit $|x| > \sqrt{1+x^2}$.

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \leq |x|$. En effet,

* Si $x \geq 0$, $|x| = x$, $-x \leq 0$ et l'on a $-x \leq x$, donc on a bien $-x \leq |x|$.
* Si $x < 0$, $|x| = -x > 0$, donc **a fortiori** $-x \leq |x|$.

En résumé : $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \leq |x| < \sqrt{1+x^2}$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R},\ -x < \sqrt{1+x^2}$, ce qui donne $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{1+x^2} > 0.}$

2.

Il est clair qu'alors $F\ :\ x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, donc par composition $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) &= \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x) : F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$$

3.

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x + \sqrt{1+(-x)^2} > 0$, d'après la question 1. ; donc $\forall x \in \mathbb{R},\ -x+\sqrt{1+x^2} > 0.$
On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ x+\sqrt{1+x^2} &= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})(-x+\sqrt{1+x^2})}{-x+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{-x^2+1+x^2}{-x+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{1}{-x+\sqrt{1+(-x)^2}}\end{aligned}$$

Donc $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \ln\left(\dfrac{1}{-x+\sqrt{1+(-x)^2}}\right) = -\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F(-x) : F \text{ est impaire.}}$$

4.

Il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2}) = +\infty$, donc par composition : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

Puisque la fonction F est impaire, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty}$

5.

Par application de la formule fondamentale du calcul intégral,

$$A(\lambda) = \Big[F(x)\Big]_{\lambda}^{2\lambda} = \ln(2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1}) - \ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1})$$

Sous cette forme la limite de $A(\lambda)$ en $+\infty$ se présente sous la forme indéterminée « $\infty - \infty$ »

$$2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1} = \lambda\Big(2+\frac{1}{\lambda}\sqrt{4\lambda^2+1}\Big) = \lambda\Big(2+\sqrt{\frac{4\lambda^2+1}{\lambda^2}}\Big) \text{ car } \lambda > 0 \Longrightarrow \lambda = \sqrt{\lambda^2}$$

De même $\lambda+\sqrt{\lambda^2+1} = \lambda\Big(1+\sqrt{\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2}}\Big)$

$$\begin{aligned}
\ln\left(2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1}\right) &= \ln\left(\lambda\left(2+\sqrt{\frac{4\lambda^2+1}{\lambda^2}}\right)\right)\\
&= \ln(\lambda)+\ln\left(2+\sqrt{\frac{4\lambda^2+1}{\lambda^2}}\right)\\
\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right) &= \ln(\lambda)+\ln\left(1+\sqrt{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= \ln\left(2+\sqrt{\frac{4\lambda^2+1}{\lambda^2}}\right)-\ln\left(1+\sqrt{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}}\right)\\
&= \ln\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}\right)-\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right)
\end{aligned}.$$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}\right)=\ln(2+\sqrt{4})=\ln 4$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right)=\ln(1+1)=\ln 2$, donc

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\ln 4-\ln 2=\ln 2.}$$

1.3 Etude de la suite (u_n)

1.

$u_0=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\big[F(x)\big]_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$; $\boxed{u_0=\ln(1+\sqrt{2})}$

$u_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$; $\boxed{u_1=\sqrt{2}-1}$

2.

$u_3=\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Effectuons une intégration par parties :

$u(x)=x^2\Longrightarrow u'(x)=2x$; $v'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Longleftarrow v(x)=\sqrt{1+x^2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, donc

$$u_3=\left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1-\underbrace{\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx}_{J}=\sqrt{2}-J$$

Calcul de J : effectuons un changement de variable. Posons $z(x)=1+x^2$, alors $dz=z'(x)dx=2xdx$. Les nouvelles bornes sont 1 et 2. On obtient :

$$\begin{aligned}
J=\int_1^2\sqrt{z}dz &= \left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_1^2\\
&= \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_3=\sqrt{2}-\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}}$$

3.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \int_0^1 x^{n+1}f(x)dx-\int_0^1 x^n f(x)dx\\
&= \int_0^1\left(x^{n+1}f(x)-x^nf(x)\right)dx \quad (\text{ linéarité de l'intégration})\\
&= \int_0^1 x^n(x-1)f(x)dx
\end{aligned}$$

On sait que $\forall x\in[0;1],\ 0\leq x^n\leq 1$ et $x-1\leq 0$, donc $x^n(x-1)\leq 0$. De plus $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 0$ donc a fortiori sur $[0;1]$:

Conclusion $\forall x \in [0;1],\ x^n(x-1)f(x) \leq 0$.
On intègre cette inégalité entre 0 et 1 , les bornes sont dans l'ordre croissant, on conclut que $\displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)f(x)dx \leq 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

4.

Il est clair que $\forall x \in [0;1],\ x^n f(x) \geq 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx \geq 0$ (bornes dans l'ordre croissant)

> La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 : **d'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (u_n) est convergente.**

5.

On sait d'après la question 1.1.4 que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f(x) \leq 1$, donc
$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq f(x) \leq 1$. Multiplions cet encadrement par $x^n \geq 0$ sur $[0;1]$, on obtient $0 \leq x^n f(x) \leq x^n$. Intégrons cet encadrement entre 0 et 1 (les bornes sont dans l'ordre croissant), il vient :

$0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n dx$, soit $\boxed{0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}.}$

6.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc **par le théorème d'encadrement** $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

EXERCICE NUMERO 2

2.1 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3

1.

Réduisons la matrice P à une matrice triangulaire avec les opérations de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \longleftarrow 2L_2+L_1 \\ L_3 \longleftarrow 2L_3-L_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow 5L_3+3L_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire supérieure, aucun terme diagonal n'est nul : elle est inversible.

$$\boxed{\text{La matrice } P \text{ est inversible}}$$

Calcul de P^{-1} : Nous allons résoudre l'équation $Y = PX$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Cette équation équivaut au système :

$$\begin{cases} 2x + y + z &= a \\ -x - 2y - z &= b \\ x - y + z &= c \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2 \longleftarrow 2L_2+L_1 \\ L_3 \longleftarrow 2L_3-L_1}]{} \begin{cases} 2x + y + z &= a \\ 5y - z &= a + 2b \\ -3y + z &= -a + 2c \end{cases} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow 5L_3+3L_2]{}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z &= a \\ 5y - z &= a + 2b \\ 2z &= -2a + 6b + 10c \end{cases}$$

La résolution donne :

$$\begin{aligned} z &= -a + 3b + 5c \\ y &= \frac{1}{5}(z + a + 2b) = \frac{1}{5}(-a + 3b + 5c + a + 2b) = b + c \\ x &= \frac{1}{2}(a - y - z) = \frac{1}{2}(a - b - c + a - 3b - 5c) = a - 2b - 3c \end{aligned}$$

Matriciellement ce résultat s'écrit : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

2.

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Un calcul immédiat donne $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = (0)$.

$\forall n \geq 3, \exists p \in \mathbb{N} \ / \ n = 3 + p$; alors $T^n = T^3 T^p = (0) T^p = (0)$.

3.

On sait que $T = PAP^{-1} \iff A = P^{-1}TP$ car les matrices P et P^{-1} sont inversibles. Donc, c'est un résultat de cours classique, $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}T^nP$.

Il s'ensuit que $\forall n \geq 3,\ A^n = P^{-1}(0)P = (0)$.

4–a)

$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= (I + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2) \\ &= I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 + +tA + tt'A^2 + t\frac{t'^2}{2}A^3 + \frac{t^2}{2}A^2 + t'\frac{t^2}{2}A^3 + \frac{t^2}{2}\frac{t'^2}{2}A^4 \\ &= I + (t + t')A + (\frac{t^2}{2} + tt' + \frac{t'^2}{2})A^2 + (0) \\ &= I + (t + t')A + \frac{(t + t')^2}{2}A^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2,\ E(t)E(t') = E(t + t')}$$

4–b)

$E(0) = I$, donc $\forall t \in \mathbb{R},\ E(t)E(-t) = E(0) = I$ d'après le **a)**. Cela suffit pour affirmer que $E(t)$ est inversible et $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ (E(t))^{-1} = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2}$$

5)

Procédons par récurrence et montrons que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (E(t))^n = E(nt)}$

Initialisation : Cette égalité est satisfaite pour $n = 0$ puisque $E(0) = I = (E(t))^0$ par convention ; elle est évidemment satisfaite pour $n = 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que cette égalité soit vraie pour k.

$(E(t))^{k+1} = (E(t))^k E(t) = E(kt)E(t)$ (par hypothèse de récurrence) et, en appliquant le **a)** pour t et $t' = kt$, on obtient :

$E(kt)E(t) = E(kt + t) = E((k+1)t)$, soit finalement $(E(t))^{k+1} = E((k+1)t)$. La propriété est héréditaire : **Par le principe du raisonnement par récurrence, on peut affirmer**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (E(t))^n = E(nt) = I + (nt)A + \frac{(nt)^2}{2}A^2}$$

2.2. Exponentielle d'une matrice

1.

Cherchons les valeurs propres de B ; soit $\lambda \in \mathbb{R}$: λ **est valeur propre de** B **si et seulement si la matrice** $B - \lambda I$ **n'est pas inversible.**

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \longleftrightarrow L_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \longleftarrow 2L_2 + \lambda L_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 0 & -2+\lambda(3-\lambda) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire ; elle n'est pas inversible si et seulement si $-2+\lambda(3-\lambda) = 0$, soit $-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$. Cette équation a une racine évidente $\lambda = 1$ et l'autre est donc $\lambda = 2$, car $-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = (\lambda - 1)(2 - \lambda)$.

> La matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elle admet 2 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable ; une condition suffisante est satisfaite

2.

La matrice D est diagonale et sur sa diagonale on reconnaît les valeurs propres de B, donc B **est semblable à** D. Pour déterminer P il faut chercher une matrice de passage. Plaçons nous dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et considérons $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est B et cherchons une base de E constituée de vecteurs propres de f. Soit $u = (x, y) \in E$. $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \iff (f - \lambda\,\mathrm{Id})(u) = (0, 0)$ soit $(B - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0)$. D'après le calcul précédent cela revient à $\begin{pmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 0 & -2+\lambda(3-\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0)$. On obtient le système : $\begin{cases} 2x + (3-\lambda)y &= 0 \\ (\lambda-1)(2-\lambda)y &= 0 \end{cases}$

Notons $E(\lambda, f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.

* Pour $\lambda = 2$ on obtient : $2x + y = 0$, soit $u = (x, -2x) = x(1, -2)$.

$E(2, f) = \{u = x(1, -2) \in E \ / \ x \in \mathbb{R}\}$, donc $\boxed{E(1, f) = \mathrm{vect}((1, -2)).}$

* Pour $\lambda = 1$ on obtient : $x + y = 0$, soit $u = (x, -x) = x(1, -1)$.

$E(1, f) = \{u = x(1, -1) \in E \ / \ x \in \mathbb{R}\}$, donc $\boxed{E(1, f) = \mathrm{vect}((1, -1)).}$

Les vecteurs $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (1, -1)$ forment une base de E, ce sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. Si l'on note $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on sait, d'après le cours, que

$$\boxed{D = Q^{-1}BQ}$$

3.

On a (c'est un résultat classique) : $B = QDQ^{-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = QD^nQ^{-1}$.

Calcul de Q^{-1} : on résout l'équation $Y = QX$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} x + y &= a \\ -x - 2y &= b \end{cases} \xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 + L_1]{} \begin{cases} x + y &= a \\ \quad -y &= a + b \end{cases}$$

Donc $y = -a - b$ et $x = 2a + b$. Matriciellement cela s'écrit : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

On sait d'après le cours (ou on montre facilement par récurrence) que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} B^n = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2^n & -2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ -2 + 2^{n+1} & -1 + 2^{n+1} \end{pmatrix}}$$

4.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}, E_n(t)$
$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 2 - 2^k & 1 - 2^k \\ -2 + 2^{k+1} & -1 + 2^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \dfrac{2t^k - (2t)^k}{k!} & \dfrac{t^k - (2t)^k}{k!} \\ \dfrac{-2t^k + 2(2t)^k}{k!} & \dfrac{-t^k + 2(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{-2t^k + 2(2t)^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{-t^k + 2(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc
$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} \quad ; \quad b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-2t^k + 2(2t)^k}{k!}$$
$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!} \quad ; \quad d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-t^k + 2(2t)^k}{k!}$$

5.

On a $\quad a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

On reconnaît deux sommes partielles de séries exponentielles : la première est la série exponentielle de somme e^t et la seconde de somme e^{2t}. Donc d'après les opérations sur les sommes de séries convergentes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$.

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) = -2e^t + 2e^{2t}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) = -e^t + 2e^{2t}$.

6– a)

Il suffit de remplacer :

$$E(t)=\begin{pmatrix} 2e^t-e^{2t} & e^t-e^{2t} \\ -2e^t+2e^{2t} & -e^t+2e^{2t} \end{pmatrix}$$

6– b)

$$\begin{aligned} E(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -2e^t & -e^t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= e^t\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{E_1}+e^{2t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{E_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ E(t)=e^tE_1+e^{2t}E_2}$$

6– c)

Un calcul sans difficultés donne : $E_1^2=E_1,\ E_2^2=E_2,\ E_1E_2=E_2E_1=(0)$.

6– d)

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= (e^tE_1+e^{2t}E_2)(e^{t'}E_1+e^{2t'}E_2) \\ &= e^te^{t'}E_1^2+e^te^{2t'}E_1E_2+e^{2t}e^{t'}E_2E_1+e^{2t}e^{2t'}E_2^2 \\ &= e^{t+t'}E_1+e^{2(t+t')}E_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (t,t')\in\mathbb{R}^2,\ E(t)E(t')=E(t+t').}$$

6–e)

On remarque que $E(0)=E_1+E_2=I$, donc $\forall t\in\mathbb{R},\ E(t)E(-t)=E(0)=I$.

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ E(t)\text{ est inversible et }(E(t))^{-1}=E(-t)}$$

EXERCICE NUMERO 3

1– a)

Notons E : « il y a une erreur dans la transmission » ; A : « le serveur A est choisi » et B : « le serveur B est choisi ».

Les événements A et B forment **un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales**

$P(E)=P(A)P_A(E)+P(B)P_B(E)=0,7\times 0,1+0,3\times 0,05.$

$$\boxed{P(E)=0,085.}$$

1–b)

On veut $P_E(A)$

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A)P_A(E)}{P(E)}=\frac{0,07}{0,085}$$

$$\boxed{P_E(A)=\frac{70}{85}=\frac{14}{17}.}$$

2–a)

Notons pour $k \geq 1$, A_k l'événement : « le serveur A est choisi au jour numéro k » et B_k l'événement : « le serveur B est choisi au jour numéro k » . On a alors

$(L_1 = k) = (A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1}) \cup (B_1 \cap \ldots \cap B_k \cap A_{k+1})$. L'événement $(L = k)$ apparaît comme la réunion de 2 événements incompatibles, donc

$P(L_1 = k) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1}) + P(B_1 \cap \ldots \cap B_k \cap A_{k+1})$; les choix se font de manière indépendante, donc $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1}) = P(A_1) \cdots P(A_k)P(B_{k+1})$ et $P(B_1 \cap \ldots \cap B_k \cap A_{k+1}) = P(B_1) \cdots P(B_k)P(A_{k+1})$, ce qui donne

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(L_1 = k) = (0,7)^k 0,3 + (0,3)^k 0,7}$$

2–b)

Les séries de termes généraux $(0,7)^k 0,3$ et $(0,3)^k 0,7$ sont des séries géométriques convergentes car leurs raisons respectives sont $0,7$ et $0,3$; la série de terme général $(0,7)^k 0,3 + (0,3)^k 0,7$ est donc convergente (somme de 2 séries convergentes) et on a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty}((0,7)^k 0,3 + (0,3)^k 0,7) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(0,7)^k 0,3 + \sum_{k=1}^{+\infty}(0,3)^k 0,7 \\
&= \frac{0,7.0,3}{1-0,7} + \frac{0,3.0,7}{1-0,3} = 0,7 + 0,3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 : L \text{ est bien une variable aléatoire discrète}}$$

2–c)

La variable L_1 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(L_1 = k)$ est convergente (l'absolue convergence est implicite car c'est une série à termes positifs). Or $kP(L_1 = k) = k(0,7)^k 0,3 + k(0,3)^k 0,7 = 0,3.0,7\Big(k(0,7)^{k-1}\Big) + 0,3.0,7\Big(k(0,3)^{k-1}\Big)$ et l'on reconnaît deux séries géométriques dérivées premières : $k(0,7)^{k-1}$ et $k(0,3)^{k-1}$, toutes les deux convergentes (leurs raisons valent respectivement $0,7$ et $0,3$). Donc l'espérance $E(L_1)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned}
E(L_1) &= 0,3.0,7 \sum_{1}^{+\infty} k(0,7)^{k-1} + 0,3.0,7 \sum_{1}^{+\infty} k(0,3)^{k-1} \\
&= 0,3.0,7 \frac{1}{(1-0,7)^2} + 0,3.0,7 \frac{1}{(1-0,3)^2} \\
&= \frac{0,7}{0,3} + \frac{0,3}{0,7} = \frac{7}{3} + \frac{3}{7} :
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(L_1) = \frac{49+9}{3 \times 7} = \frac{58}{21}}$$

2–d)

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, l'événement $(L_1 = k, L_2 = n)$ est

$(L_1 = k, L_2 = n) = (A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+n} \cap A_{n+k+1}) \cup (B_1 \cap \ldots \cap B_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_{k+n} \cap B_{n+k+1})$; c'est donc la réunion de 2 événements incompatibles et par suite :

$P(L_1 = k, L_2 = n) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+n} \cap A_{n+k+1}) + P(B_1 \cap \ldots \cap B_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_{k+n} \cap B_{n+k+1})$; les événements A_j et B_i sont indépendants puisque les choix du serveurs se font de manière indépendante ; il en résulte que :

$P(L_1 = k, L_2 = n) = (0,7)^k (0,3)^n 0,7 + (0,3)^k (0,7)^n 0,3$

$$\boxed{\forall (k,n) \in \mathbb{N}^{*2},\ P(L_1 = k, L_2 = n) = (0,7)^{k+1}(0,3)^n + (0,3)^{k+1}(0,7)^n}$$

2–e)

Tout d'abord, $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$; on obtiendra la loi de L_2 comme loi marginale du couple (L_1, L_2) : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$\begin{aligned}
P(L_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k, L_2 = n) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}((0,7)^{k+1}(0,3)^n + (0,3)^{k+1}(0,7)^n) \\
&= (0,3)^n \sum_{k=1}^{+\infty}(0,7)^{k+1} + (0,7)^n \sum_{k=1}^{+\infty}(0,3)^{k+1} \\
&= (0,3)^n \frac{(0,7)^2}{1-0,7} + (0,7)^n \frac{(0,3)^2}{1-0,3}
\end{aligned}$$

(Sommes de deux séries géométriques : la première de premier terme $(0,7)^2$ et de raison $0,7$, la seconde de premier terme $(0,3)^2$ et de raison $0,3$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(L_2 = n) = (0,7)^2(0,3)^{n-1} + (0,3)^2(0,7)^{n-1}}$$

3– a)

Le nombre de fois où la serveur A est choisi pendant les n premiers jours est un entier entre 0 et n : donc $N_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Les choix se faisant de manière indépendante les uns des autres, la variable N_n (qui compte en quelque sorte le nombre de succès - choix du serveur A - au cours de n expériences de Bernoulli, identiques et effectuées de manière indépendante) suit une loi Binomiale de paramètres n et $0,7$.

$$\boxed{H_n \hookrightarrow B(n; 0,7) : E(N_n) = 0,7n \text{ et } V(N_n) = 0,21n}$$

3– b)

T_1 est la variable qui compte le nombre d'épreuves de Bernoulli (choix du serveur) effectuées jusqu'à obtention du premier succès : T_1 suit une loi géométrique de paramètre $0,7$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*, (T_1 = n) = B_1 \cap \ldots \cap B_n \cap A_{n+1}$. Par indépendance des choix, $P(T_1 = n) = (0,3)^n.0,7$. D'après le cours,

$$\boxed{E(T_1) = \frac{1}{0,7} = \frac{10}{7} \text{ et } V(T_1) = \frac{0,3}{(0,7)^2} = \frac{30}{49}}$$

3–c)

$T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $(T_2 = k) = C_k \cap A_k$ où C_k est l'événement : « au cours des $k-1$ premiers jours le serveur A a été choisi exactement une fois » . Cet événement est $(N_{k-1} = 1)$. Donc $(T_2 = k) = (N_{k-1} = 1) \cap A_k$.

Appliquons la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(T_2 = k) &= P(N_{k-1} = 1) P_{(N_{k-1}=1)}(A_k) \\
&= (k-1)(0,7)(0,3)^{k-2}0,7
\end{aligned}$$

car les événements $(N_{k-1} = 1)$ et A_k sont indépendants.

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ P(T_2 = k) = (k-1)(0,7)^2(0,3)^{k-2}}$$

4–a)

D'après le cours, on peut prendre pour densité f_Z de Z, la fonction définie par :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ e^{-t} & \forall t \geq 0 \end{cases} \text{ et alors } F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

4–b)

C'est l'espérance de Z c'est-à-dire 1.

4–c)

On a $W = 0,1.Z + 1$

4–d)

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ P(W \leq t) &= P(0,1Z + 1 \leq t) \\ &= P(0,1Z \leq t - 1) \quad \text{(on multiplie alors par } 10 > 0\text{)} \\ &= P(Z \leq 10(t-1)) \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_W(t) = F_Z(10(t-1))$$

On sait que $t \mapsto 10(t-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$; F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition $F_W\ :\ t \mapsto F_Z(10(t-1))$ est continue, sur $\mathbb{R}$.

F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$; $t \mapsto 10(t-1)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{1\}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, donc par composition $t \mapsto F_Z(10(t-1))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\forall t < 1,\ F'_W(t) = 0 \text{ et } \forall t > 1,\ F'_W(t) = 10e^{-10(t-1)}$$

> La fonction de répartition F_W de la variable W est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{1\}$: W est donc une variable à densité

On prendra donc $f_W(t) = F'_W(t)$ pour $t \neq 1$ et $f_W(1) = 0$ (C'est notre choix). Explicitons :

$$F_W(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \leq 1 \\ 1 - e^{-10(t-1)} & \forall t \geq 1 \end{cases} \ ; \quad \text{donc} \quad f_W(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \leq 1 \\ 10e^{-10(t-1)} & \forall t > 1 \end{cases}$$

4–e)

Reprenons l'expression de W du **c)** : $W = 0,1.Z + 1$. Par linéarité de l'espérance, $E(W) = 0,1E(Z) + 1 = 0,1 \times 1 + 1$:

$$\boxed{E(W) = 1,1}$$

5–a)

$*$ $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (c'est une fonction polynômiale); exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Il s'ensuit que $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Il est clair qu'alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque : $f(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$, donc f est continue au point $t = 0$. rappelons que cette propriété n'et pas exigible pour avoir une densité.

f est continue sur $\mathbb{R}$

$*$ Il est clair que f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$

$*$ Sous réserve de convergence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ car sur $]-\infty, 0[,\ f(t) = 0$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)dt &= \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}(1-e^{-\frac{x^2}{2}}) = 1.\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien une densité de probabilité}}$$

5–b)

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

- Si $x < 0$, alors l'intervalle d'intégration ne contient que des nombres négatifs pour lesquels f est nulle, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$.

$\forall x < 0,\ F_X(x) = 0.$

- Si $x \geq 0$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$ d'après la formule de Chasles pour les intégrales convergentes, soit

$$F_X(x) = \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{\text{En résumé : } F_X(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geq 0}$$

Remarque : on a remarqué que les deux expressions coïncidaient pour $x = 0$.

5–c)

Si elle existe, l'espérance $E(X)$ vaut $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

Considérons une variable Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Alors $V(Y) = E(Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. La fonction $t \mapsto t^2e^{-\frac{t^2}{2}}$ est évidemment une fonction paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

La variance de Y est $V(Y) = 1$, on a donc $V(Y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$, soit $1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}E(X).$

Ce qui prouve dèjà que $E(X)$ existe et on a immédiatement

$$\boxed{E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$