

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 2006

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

EXERCICE 1

. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x, y) = e^x (x + y^2 + e^x)$$

1. Recherche d'extremum local de g .

1. Etudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.
3. Dédire des variations de f l'existence d'un unique réel α , élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)
4. Déterminer le seul point critique de g , c'est-à-dire le seul couple de \mathbb{R}^2 , en lequel g est susceptible de présenter un extremum.
5. Vérifier que g présente un extremum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
6. Montrer que l'on a :

$$4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$$

2. Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. Prouver que f est convexe sur \mathbb{R} . En déduire que pour tous réels x et t :

$$f(x) + (t - x)f'(x) \leq f(t)$$

2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}$$

Puis que pour tout entier naturel n :

$$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser

3. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-2, -1]$:

$$0 \leq (x - \alpha)f'(x) - f(x) \leq \frac{(x - \alpha)^2}{e}$$

- (a) Prouver alors que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$

- (b) Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n} - 1}$$

4. Écrire un programme en langage Pascal permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α , de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}$$

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

3. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

(a) A l'aide d'une intégration par parties portant sur des intégrales définies sur le segment $[0, A]$ avec $A \geq 0$, prouver que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+2} = (n+1) I_n$$

(b) En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que :

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(c) Donner la valeur de I_1

(d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} &= 2^n n! \end{aligned}$$

4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Démontrer que f est une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

i. Justifier que X admet une espérance $E(X)$, et préciser sa valeur

ii. Justifier que X admet une variance $V(X)$, et préciser sa valeur.

5. On désigne par F et G les fonctions de répartition respectives de X et de $Y = X^2$

(a) Exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ en distinguant les deux cas : $x < 0$ et $x \geq 0$

(b) En déduire que Y est une variable à densité. Reconnaître la loi de Y et donner la valeur de $E(Y)$ et $V(Y)$

EXERCICE 3

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

1. Etude d'un endomorphisme de E .

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } \quad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Vérifier que la matrice A de f dans \mathcal{B} , s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?
4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\text{pour tout réel } x : \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x - 1 \text{ et } R_2(x) = (x - 1)^2$$

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f . Écrire la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' ainsi que la matrice D de f dans la base \mathcal{B}' .
6. Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2x + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B}

7. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1} . Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$[A^{-1}]^n = P [D^{-1}]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$

2. Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j , le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j .

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($k \geq 0$)
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $P[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 (On pourra s'aider d'un arbre). Calculer l'espérance et la variance de X_2
2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1}U_k$$

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0
4. Pour tout k de \mathbb{N} , donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 0] = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 1] = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 2] = 0$$



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

ECRICOME VOIE E 2006

CORRIGE

PREMIER EXERCICE

1.1 Recherche d'un extremum local de g

1)

La fonction f est définie, continue, dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions continues, dérivables sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + 2e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$

Explication des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2)

Remarquons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$. La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe C_f représentative de f en $-\infty$. De plus $f(x) - (x + 1) = 2e^x > 0$: la courbe C_f est au dessus de son asymptote.

3)

La fonction est continue sur \mathbb{R} , strictement croissante sur \mathbb{R} , c'est donc une bijection de \mathbb{R} sur son image qui est l'intervalle $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$ d'après le tableau de variations .

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R} / y = f(x)$; en particulier pour $y = 0$.

$$\text{Il existe un unique réel } \alpha \text{ tel que } f(\alpha) = 0$$

$$\text{De plus, } f(-2) = -1 + 2e^{-2} = -1 + \frac{2}{e^2} .$$

$e > 2 \implies e^2 > 4 > 0$, donc $\frac{1}{e^2} < \frac{1}{4}$ puisqu'il s'agissait d'une inégalité entre nombres strictement positifs. On a donc $-1 + \frac{2}{e^2} < -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$.

Conclusion : $f(-2) < 0$.

$f(-1) = \frac{2}{e} > 0$. Sur l'intervalle $[-2, -1]$, la fonction f change de signe, donc elle s'annule

(puisque'elle est continue) : $\alpha \in]-2, -1[$

4)

L'application $(x, y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 en tant que fonction polynomiale et à valeurs dans \mathbb{R} ; $t \mapsto e^t$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} , donc par composition, $(x, y) \mapsto e^x$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

L'application $(x, y) \mapsto x + y^2$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 (fonction polynomiale).

Donc l'application $(x, y) \mapsto x + y^2 + e^x$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 comme somme de fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

L'application $g : (x, y) \mapsto (x + y^2 + e^x)e^x$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 comme produit. On en déduit que g admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur \mathbb{R}^2 (puisque g est **a fortiori** de classe C^1). \mathbb{R}^2 étant une partie ouverte de \mathbb{R}^2 , g ne peut admettre un extremum qu'en un point critique.

• **Recherche des points critiques**

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} e^x(x + y^2 + e^x) + e^x(1 + e^x) &= 0 \\ 2ye^x &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^x(1 + x + y^2 + 2e^x) &= 0 \\ y &= 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1 + x + y^2 + 2e^x &= 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0 \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f(x) &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{puisque } y = 0 \\ &\iff \begin{cases} x &= \alpha \quad \text{d'après la question 3)} \\ y &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction g admet un seul point critique : $(\alpha, 0)$

5)

La fonction g étant de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur \mathbb{R}^2 . On peut donc appliquer à g le théorème de Schwarz, c'est-à-dire ,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = s(x, y)$$

Utilisons les notations de Monge ; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = r(x, y) &= e^x(1 + x + y^2 + 2e^x) + e^x(1 + 2e^x) \\ &= e^x(2 + x + y^2 + 4e^x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = t(x, y) &= 2e^x \\ s(x, y) &= 2ye^x \end{aligned}$$

Au point $(\alpha, 0)$:

$$\begin{aligned} r(\alpha, 0) &= e^\alpha(2 + \alpha + 4e^\alpha) \\ t(\alpha, 0) &= 2e^\alpha \\ s(\alpha, 0) &= 0 \end{aligned}$$

$(s^2 - rt)(\alpha, 0) = -2e^{2\alpha}(2 + \alpha + 4e^\alpha)$. On sait que $-2 < \alpha < 1$, donc $2 + \alpha > 0$ et par suite $2 + \alpha + 4e^\alpha > 0$ puisque $4e^{2\alpha} > 0$

$(s^2 - rt)(\alpha, 0) < 0$, donc g possède en ce point un extremum local.
Or $r(\alpha, 0) = e^\alpha(2 + \alpha + 4e^\alpha) > 0$, donc cet extremum est un minimum local.

6)

La valeur de ce minimum est $\beta = g(\alpha, 0) = e^\alpha(\alpha + e^\alpha)$. Or on sait que $f(\alpha) = 0$, ce qui donne $\alpha + 1 + 2e^\alpha = 0$, d'où l'on tire : $e^\alpha = -\frac{1}{2}(\alpha + 1)$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha - \frac{1}{2}(\alpha + 1)) \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\frac{\alpha - 1}{2}) \\ &= -\frac{\alpha^2 - 1}{4} \end{aligned}$$

Cette dernière égalité équivaut à $4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$

1.2 Etude d'une suite réelle

1)

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2e^x > 0$, donc

La fonction f est convexe sur \mathbb{R}

Cela signifie que la courbe C_f est au dessus de ses tangentes.

Soit $x \in \mathbb{R}$; la tangente au point d'abscisse x de la courbe C_f a pour équation :

$y = f'(x)(t - x) + f(x)$; la variable étant ici t , la courbe C_f a pour équation $y = f(t)$.

La courbe C_f au dessus de ses tangentes s'exprime ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(x) + (t - x)f'(x) \leq f(t)$$

2)

Remplaçons dans l'inégalité précédente x par u_n et t par u_{n+1} . On obtient

$$f(u_n) + (u_{n+1} - u_n)f'(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Par définition de la suite (u_n) , on a $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$; l'inégalité précédente s'écrit alors :

$f(u_n) - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}f'(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $0 \leq f(u_{n+1})$. Or $f(\alpha) = 0$, donc on peut écrire $f(\alpha) \leq f(u_{n+1})$. L'application f étant **strictement** croissante sur \mathbb{R} , on en déduit

$$\alpha \leq u_{n+1}$$

On vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq u_{n+1}$, ce qui peut s'écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq u_n$ (il suffit de faire le changement d'indice $k = n + 1$). Mais $u_0 = -1$ et $\alpha < -1$ d'après la question **1-3**), donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq u_n$$

• La fonction f est croissante sur \mathbb{R} , donc $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq u_n \implies 0 \leq f(u_n)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq 0$ puisque $f' > 0$ sur \mathbb{R} . Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite (u_n) est décroissante

On a donc en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$, soit $u_n \leq -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par α donc elle converge vers un réel $\ell \geq \alpha$

- Détermination de ℓ .

f et f' sont continues sur \mathbb{R} (d'après la question **1-3**), donc elles sont continues au point ℓ ; on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(u_n) = f'(\ell)$. De plus $f' > 0$ sur \mathbb{R} , donc

$$f'(\ell) \neq 0 \text{ et on peut affirmer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

Par passage à la limite, l'égalité $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ donne $\ell - \ell = -\frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, soit $-f(\ell) = 0$.

$$\ell = \alpha$$

3-a)

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, donc $u_{n+1} - \alpha = u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, soit encore

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)}$$

On a vu au **1-3-3**) et au **1-2-2**) que $-2 \leq \alpha \leq u_n < -1$, donc $u_n \in [-2, -1]$; on peut donc utiliser l'inégalité admise en y remplaçant x par u_n . On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq (u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \quad (*)$$

D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + 2e^x$, donc $f'(x) > 1$, ce qui équivaut à $0 < \frac{1}{f'(x)} < 1$.

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{f'(u_n)} < 1 \quad (**)$$

Multiplions membre à membre les inégalités (*) et (**). On trouve

$$0 \leq \frac{(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$

3-b)

Initialisation . On sait que $-2 < \alpha < -1$, donc $1 < -\alpha < 2$ d'où $u_0 + 1 < u_0 - \alpha < u_0 + 2$, soit $0 < u_0 - \alpha < 1$. D'autre part, $\frac{1}{e^{2^0-1}} = \frac{1}{e^0} = 1$. On a bien $0 \leq u_0 - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^0-1}}$

L'inégalité $0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$ est satisfaite au rang $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier $n \geq 0$, on ait $0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$. S'agissant d'une

inégalité entre nombres positifs, on peut l'élever au carré : $0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \left(\frac{1}{e^{2^n-1}}\right)^2$,

ce qui équivaut successivement à

$$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{(e^{2^n-1})^2},$$

$$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{e^{2(2^n - 1)}}, \text{ ou encore à}$$

$$0 \leq (u_n - \alpha)^2 \leq \frac{1}{e^{2^{n+1} - 2}}, \text{ puis à}$$

$$0 \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \frac{1}{e \times e^{2^{n+1} - 2}} \text{ (car } \frac{1}{e} > 0) \text{ et enfin à}$$

$$0 \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \frac{1}{e^{2^{n+1} - 1}} \text{ (***) ; nous n'avons pas oublié que } (e^x)^y = e^{xy} \text{ et } e^x \times e^y = e^{x+y}$$

Or on sait que $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$ (****), donc en comparant (***) et (****), on obtient

$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^{n+1} - 1}}$. C'est l'inégalité attendue au rang $n + 1$. La propriété est héréditaire.

Par principe du raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n - 1}}$

4)

Si $\frac{1}{e^{2^n - 1}} \leq 10^{-p}$, alors l'inégalité du 3- b) donnera $0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}$

Réolvons l'inéquation $\frac{1}{e^{2^n - 1}} \leq 10^{-p}$. Elle équivaut successivement à :

$10^p \leq e^{2^n - 1}$, puis à $2^n - 1 \geq p \ln 10$ (car la fonction \ln est strictement croissante), puis à

$$2^n \geq 1 + p \ln 10 = \text{et enfin à } \boxed{n \ln 2 \geq \ln(1 + p \ln(10))}$$

On prendra n égal à $1 +$ la partie entière de $\ln(1 + p \ln(10))$ notée trunc en langage Pascal, c'est-à-dire $n = 1 + \text{trunc}(\ln(1 + p \ln(10)))$ On utilisera bien-sûr la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{u_n + 1 + 2e^{u_n}}{1 + 2e^{u_n}}$

PROGRAM ECRICOME2006 :

```
var u : real ; k, n : integer ;
BEGIN
n := 1+ trunc(ln(1 + p ln(10)));
u := -1 ;
for k := 1 to n do
u := u-(u+1+2*exp(u))/1+2*exp(u) ;
writeln('u = ', u : 2 : p) ;
END.
```

Le programme a tourné avec $p = 8$, on avait alors $n = 9$ et on a obtenu pour valeur approchée de $\alpha : -1.46305$ (Turbo-Pascal version 7)

Remarque : On peut aussi inclure dans ce programme la recherche informatique de n , par une boucle.

DEUXIEME EXERCICE
1)

$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) > 0$. Posons $t = \frac{x^2}{2}$, on a $x > 0$, donc $x = \sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}$

$x^{n+2} = (\sqrt{2}t^{\frac{1}{2}})^{n+2} = (\sqrt{2})^{n+2} \times t^{\frac{n+2}{2}}$. Il s'ensuit que

$x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) = (\sqrt{2})^{n+2} t^{\frac{n+2}{2}} \exp(-t)$. On a $t \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^{n+2} t^{\frac{n+2}{2}} \exp(-t) = 0$ par croissances comparées (rapelons que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^a}{\exp(t)} = 0$)

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) = 0$ ce qui s'écrit aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \exp(-\frac{x^2}{2})}{\frac{1}{x^2}} = 0 \text{ et cela exprime que } x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) \underset{(+\infty)}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2)

Du résultat précédent on déduit :

$\exists A > 0 / \forall x \geq A, 0 \leq x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) \leq 1$ et en divisant les termes de cet encadrement par x^2 (qui est strictement positif puisque $x \geq A > 0$), on obtient :

$$\forall x \geq A, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

Remarquons que la fonction f est continue sur \mathbb{R} puisque $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est continue et à valeurs dans \mathbb{R} et l'exponentielle est continue sur \mathbb{R} , donc $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2})$ est continue sur \mathbb{R} . Il en résulte immédiatement que f est le produit de deux fonctions continues sur \mathbb{R} donc elle est continue sur \mathbb{R} et a fortiori sur \mathbb{R}^+

L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente d'après le critère de Riemann car $2 > 1$. **Par le théorème de comparaison des fonctions continues positives**, on conclut que l'intégrale $\int_A^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente. Sur l'intervalle $[0, A]$, f_n est continue, donc l'intégrale $\int_0^A f_n(x) dx$ existe et par conséquent

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \text{ est convergente.}$$

3-a)

Soit $A > 0$. Posons $I_{n+2}(A) = \int_0^A x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$.

Soit $u(x) = x^{n+1}$; $u'(x) = (n+1)x^n$; $v'(x) = x \exp(-\frac{x^2}{2})$; $v(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2})$. Les fonctions u et v sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^+ (cela se démontre comme la continuité de f au **2**) et on peut intégrer par parties.

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx &= [-x^{n+1} \exp(-\frac{x^2}{2})]_0^A + (n+1) \int_0^A x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) dx \\ &= -A^{n+1} \exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1) \int_0^A x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) dx \end{aligned}$$

$\lim_{A \rightarrow +\infty} I_{n+2}(A) = I_{n+2}$ puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{n+2} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ converge. De même $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_n(A) = I_n$. D'autre part, $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{n+1} \exp(-\frac{A^2}{2}) = 0$ (cela se démontre comme au **1**).

En passant à la limite dans l'égalité précédente qui s'écrit :

$$I_{n+2}(A) = -A^{n+1} \exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1) \int_0^A x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = -A^{n+1} \exp(-\frac{A^2}{2}) + (n+1)I_n(A),$$

on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3-b) _____

$I_0 = \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$. Si l'on considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, une densité de X est la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ et par définition d'une densité on a : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = 1$. Or la fonction $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2})$ est manifestement paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$. Il en résulte que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \frac{1}{2}$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{2\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

3-c) _____

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} (-e^{-\frac{B^2}{2}} + 1) \end{aligned}$$

$$I_1 = 1 \text{ puisque } \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-\frac{B^2}{2}} = 0$$

3-d) _____

Cas de I_{2n} . Nous procéderons par récurrence.

- **Initialisation :** pour $n = 0$

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{0!}{2^0 \cdot 0!}. \text{ L'égalité a bien lieu.}$$

- **Hérédité** Supposons que pour un entier $n \geq 0$, on ait $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$. D'après la relation **3-a)** $I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n}$ (on a remplacé n par $2n$). Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \times (2n+1) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^n n! 2(n+1)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1} (n+1)!} \end{aligned}$$

C'est l'égalité attendue au rang $n+1$: La propriété est héréditaire et

Par principe du raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Cas de I_{2n+1} . La démarche est identique. Donnons-en une justification abrégée.

• **Initialisation :** pour $n = 0$

$I_1 = 1 = 2^0 0!$. L'égalité a bien lieu.

• **Hérédité** Si pour un entier $n \geq 0$, on a $I_{2n+1} = 2^n n!$, alors

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+3} = I_{(2n+1)+2} \\ &= (2n+2)I_{2n+1} \quad \text{d'après 3-a)} \\ &= 2^n n! \cdot 2(n+1) = 2^{n+1} (n+1)! \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = 2^n n!$

4-a)

On a vu au **2)** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n était continue sur \mathbb{R}^+ ; f_1 est donc continue sur \mathbb{R}^+ . Ceci prouve que f est continue sur \mathbb{R}^{*+} (et continue en 0 à droite). L'application $x \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R}^{*-} , donc f est continue sur \mathbb{R}^{*-}

(i) f est continue sur \mathbb{R}^*

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_1(x) \geq 0$ (propriété de l'exponentielle), donc

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ se réduit à $\int_0^{+\infty} f_1(x) dx = I_1$. On sait d'après **3-c)** que cette intégrale vaut 1, donc

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

D'après les points (i), (ii), (iii) f est une densité de probabilité

4-b)

(I) $E(X)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ est (absolument) convergente. Or cette intégrale se réduit à $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ puisque sur \mathbb{R}^{*-} , $f(x) = 0$. La quantité $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ étant ≥ 0 sur \mathbb{R}^+ , la convergence de l'intégrale suffit. Or $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I_2$ et cette intégrale est convergente d'après **2)**.

$E(X)$ existe et $E(X) = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2!}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ d'après **3-d)**

(II) $V(X)$ existe si et seulement si $E(X)$ existe (et c'est le cas) et $E(X^2)$ existe. L'existence de $E(X^2)$ se justifie comme celle de $E(X)$ et $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I_3$; donc $E(X^2) = 2^1 1! = 3$ d'après **3-d)**. Donc, d'après la formule de Koenig-Huyghens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$,

$$V(X) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

5-a)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$.

- Si $x < 0$, l'événement $(X^2 \leq x < 0) = \emptyset$, donc $G(x) = 0$.
- Si $x \geq 0$, $P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$.

Pour les lecteurs qui ne sauraient pas d'où vient cette relation, rappelons :

$P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} f(t)dt - \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} f(t)dt$ d'après la relation de Chasles sur les intégrales convergentes ; ce qui donne le résultat par définition de la fonction de répartition d'une variable à densité.

Remarque : l'auteur de l'énoncé a sans doute voulu dire « exprimer G à l'aide de F » car $G(x)$ ne s'exprime pas à l'aide de $F(x)$.

5-b)

Si $x \geq 0$, $G(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)dt = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$ puisque f est nulle sur \mathbb{R}^- , donc sur $[-\sqrt{x}, 0]$

$$G(x) = \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = [-e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

Récapitulons : $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Y est donc une variable à densité puisque sa fonction de répartition est celle d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2}) ; E(Y) = 2 \text{ et } V(Y) = 4$

TROISIEME EXERCICE

3.1 Etude d'un endomorphisme de E

1)

Nous noterons P_k le polynôme $x \mapsto x^k$.

Soit $P \in E$,

- Si $P = (0)$ (polynôme nul), $P' = (0)$ et $Q = (0)$.
- Si $\deg P = 0$, $P' = (0)$ et $Q = P$.
- Si $\deg P \in \{1, 2\}$, $\deg P' \leq 1$, $\deg(X - 1)P' \leq 2$, donc $\deg Q \leq 2$.

Dans tous les cas, Q appartient à E .

Soit $(T_1, T_2) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (f(\alpha T_1 + T_2))(x) &= (x - 1)(\alpha T_1 + T_2)'(x) + (\alpha T_1 + T_2)(x) \\ &= \alpha((x - 1)T_1'(x) + T_1(x)) + (x - 1)T_2'(x) + T_2(x), \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de la dérivation et les règles de calculs élémentaires dans \mathbb{R} .

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, (f(\alpha T_1 + T_2))(x) = (\alpha f(T_1) + f(T_2))(x)$, ce qui veut dire $f(\alpha T_1 + T_2) = \alpha f(T_1) + f(T_2)$.

f est linéaire de E dans E : c'est donc un endomorphisme de E

2)

$\forall x \in \mathbb{R}, f(P_0)(x) = P_0(x)$ car $P_0'(x) = 0$: $f(P_0) = P_0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P_1))(x) = (x-1) + x = 2x - 1 = (2P_1 - P_0)(x) : \boxed{f(P_1) = -P_0 + 2P_1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P_2))(x) = (x-1) \times 2x + x^2 = 3x^2 - 2x = (3P_2 - 2P_1)(x) : \boxed{f(P_2) = -2P_1 + 3P_2}$$

La matrice de f dans la base canonique de E , qui s'écrit en mettant en colonnes les coordonnées de $f(P_0), f(P_1)$ et $f(P_2)$, vaut donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3)

La matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux.

$$\text{spect } A = \text{spect } f = \{1, 2, 3\}$$

$\text{Card}(\text{spect } f) = 3 = \dim E$ est une condition suffisante de diagonalisabilité :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

L'endomorphisme f n'admet pas 0 pour valeur propre, f est injectif donc bijectif puisque c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie 3.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$$

4)

$R_0 = P_0$; on sait donc déjà que $f(R_0) = R_0$: R_0 est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1 (n'oublions pas que R_0 n'est pas nul).

$R_1 = -P_0 + P_1$; la liste de ses coordonnées dans la base canonique de E est $(-1, 1, 0)$

; les coordonnées de $f(R_1)$ sont données par $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte que

$f(R_1) = 2R_1$: R_1 , qui n'est pas nul, est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

R_2 a pour coordonnées $(1, -2, 1)$ puisque $(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$. $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$f(R_2) = 3R_2$: R_2 , qui n'est pas nul, est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 3.

On sait que lorsque, dans un espace de dimension n , un endomorphisme possède n valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les 3 sous-espaces propres $E_1(f), E_2(f), E_3(f)$ sont de dimension 1. Les trois vecteurs R_0 (resp R_1, R_2) constituent une base de $E_1(f)$ (resp $E_2(f), E_3(f)$) et puisque f est diagonalisable, la famille (R_0, R_1, R_2) constitue une base de E .

$$\boxed{\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2) \text{ est une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f}$$

La matrice P de passage de la base canonique \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de P_0, P_1 et P_2 dans \mathcal{B} :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après les résultats du 4),
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(On écrit en colonnes les coordonnées de $f(R_0), f(R_1)$ et $f(R_2)$ dans la base (R_0, R_1, R_2))

6)

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier ces résultats, desquels on déduit :

$$\begin{cases} P_2 = R_0 + 2R_1 + R_2 \\ P_1 = R_0 + R_1 \end{cases}$$

On sait déjà que $R_0 = P_0$. La matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} est P^{-1} ; on peut l'obtenir en écrivant en colonnes les coordonnées de P_0, P_1 et P_2 dans la base \mathcal{B}' .

On trouve
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7)

A^{-1} et D^{-1} sont les matrices de f^{-1} dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . La matrice P étant la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on sait d'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes que $D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, relation équivalente à $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ (obtenue en multipliant la première égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} .)

Remarque : On aurait pu aussi partir de l'égalité $A = PDP^{-1}$, prendre l'inverse des deux membres (il n'y a aucun souci car toutes les matrices sont inversibles) :

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

On demande une récurrence, faisons une récurrence.

Initialisation :

Posons $(A^{-1})^0 = (D^{-1})^0 = I$ (matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Il est clair que l'égalité est alors satisfaite ; elle l'est aussi pour $n = 1$

Hérédité : Supposons que l'égalité soit satisfaite pour un entier $n \geq 0$: on a $(A^{-1})^n = P(D^{-1})^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{n+1} &= (A^{-1})^n \times A \\ &= P(D^{-1})^n P^{-1} P D^{-1} P^{-1} \\ &\quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence et le cas } n = 1 \\ &= P(D^{-1})^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée au rang $n + 1$ et par le principe du raisonnement par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A^{-1})^n = P(D^{-1})^n P^{-1}$$

Remarque : On pouvait aussi dire ceci :

$(A^{-1})^n$ et $(D^{-1})^n$ sont les matrices de $(f^{-1})^n$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' ; la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est P : d'après la formule de changement de base, on avait tout de suite le résultat.

On sait que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $(D^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$

d'après des propriétés classiques sur les matrices diagonales et

$$\begin{aligned}(A^{-1})^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{3})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{3})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La troisième colonne de la matrice $(A^{-1})^n$ est

$$\begin{pmatrix} 1 - 2(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{3})^n \\ (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$

3.2 Suite d'épreuves aléatoires

1)

Nous remarquons que si l'on tire la boule numéro 2 au premier tirage, on n'enlève aucune boule de l'urne ; on peut donc obtenir $X_2 = 0, 1$ ou 2. Utilisons alors le système complet d'événements $((X_1 = 0), (X_1 = 1), (X_1 = 2))$. **D'après la formule des probabilités totales,**

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_2 = 0)$$

- Si $(X_1 = 0)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, ne contient que la boule numéro 0 ; donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = 1$
- Si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, contient les boules numéros 0 et 1 ; donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$
- Si $(X_1 = 2)$ est réalisé, l'urne, avant le deuxième tirage, contient les 3 boules donc $P_{X_1=2}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}$

D'autre part, $P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$

Finalement, on obtient $P(X_2 = 0) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{11}{18}$

Pour le calcul de $P(X_2 = 1)$, c'est le même principe, on a

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_2 = 1)$$

- $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = 0$ car si $(X_1 = 0)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, ne contient plus la boule numéro 1.
- $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ car si $(X_1 = 1)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, ne contient que les boules numéros 0 et 1.
- $P_{X_1=2}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$ car si $(X_1 = 2)$ est réalisé, l'urne, à l'issue du premier tirage, contient les 3 boules.

Finalement, on obtient $P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{18}$

On sait que les événements $(X_2 = 0), (X_2 = 1), (X_2 = 2)$ forment un système complet, donc $P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) = \frac{2}{18}$. Récapitulons :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$

$$E(X_2) = \frac{1}{18}(1 \times 5 + 2 \times 2) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$E(X_2^2) = \frac{1}{18}(1 \times 5 + 4 \times 2) = \boxed{\frac{13}{18}}$$

$$V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \frac{13}{18} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{17}{36}}$$

2)

Remarquons que si aux rangs $1, 2, \dots, k$ on tire toujours la boule numéro 2, alors à l'issue du $k^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contiendra les trois boules, donc X_k peut prendre les valeurs $0, 1, 2$.

Utilisons le système complet d'événements $((X_k = 0), (X_k = 1), (X_k = 2))$ pour $k \geq 1$. Les raisonnements et les calculs se font **exactement** de la même façon qu'au **1**) : on remplace dans la formule des probabilités totales 1 par k et 2 par $k+1$. On obtient les résultats suivants :

$$P_{X_k=0}(X_{k+1} = 0) = 1; \quad P_{X_k=1}(X_{k+1} = 0) = \frac{1}{2}; \quad P_{X_k=2}(X_{k+1} = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P_{X_k=0}(X_{k+1} = 1) = 0; \quad P_{X_k=1}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}; \quad P_{X_k=2}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P_{X_k=0}(X_{k+1} = 2) = 0; \quad P_{X_k=1}(X_{k+1} = 2) = 0; \quad P_{X_k=2}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3}$$

En reportant ces résultats dans la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{k+1} = 0) = P(X_k = 0) + \frac{1}{2}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 2)$$

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 2)$$

$$P(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3}P(X_k = 2)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} P(X_{k+1} = 0) \\ P(X_{k+1} = 1) \\ P(X_{k+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = I$; on peut alors écrire : $\forall k \geq 1, U_{k+1} = A^{-1}U_k$

Pour $k = 0, \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = U_1$ d'après les calculs effectués dans **1**)

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, U_{k+1} = A^{-1}U_k$

3)

On démontre alors facilement par récurrence (et nous laissons ce petit travail au lecteur) que

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_k = (A^{-1})^k U_0$$

4)

L'égalité précédente s'écrit aussi : $\begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix} = (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce produit est en fait, d'après les règles de calcul du produit matriciel, la troisième colonne de la

matrice $(A^{-1})^k$ et le résultat a été donné au **3.1-7**) avec n au lieu de k . On peut donc conclure :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} P(X_k = 0) &= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ P(X_k = 1) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ P(X_k = 2) &= \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{cases}$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ et } \left|\frac{1}{3}\right| < 1 \implies \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0 \end{cases} \text{ Donc}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 0) = 1 ; \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(X_k = 2) = 0$$